

Solving the inhomogeneous Second-Order Wave Equation with asymmetric boundary conditions

Nasrin Tavakkoli¹, Reza Babae², Ehsan Jabbari^{3*}

¹ MSc Graduate, Department of Civil Engineering, Faculty of Engineering, University of Qom, Qom, Iran.

² PhD graduate, Department of Civil Engineering, Faculty of Engineering, University of Qom, Qom, Iran.

³ Associate Professor, Department of Civil Engineering, Faculty of Engineering, University of Qom, Qom, Iran.

Corresponding Author's E-mail: e.jabbari@qom.ac.ir

Received: 11 May 2025 Accepted: 26 Sep. 2025
Revised: 05 Aug. 2025 Published: 23 Sep. 2023



Homepage: ijwer.uoz.ac.ir

Abstract: The inhomogeneous second-order wave equation is an essential analytical instrument for simulating complex phenomena in water engineering, fluid mechanics, and hydraulics, including dynamic dam-reservoir interaction, tsunami propagation, and contaminant transport. This study presents a novel analytical solution derived via separation of variables, leveraging new, specific boundary conditions. The resulting model is validated against two numerical techniques: the meshless Multiquadric (MQ) method and the Finite Difference (FD) method. The analytical solution serves as a precise benchmark for evaluating the efficiency and accuracy of these numerical approaches. In a comparative example, the MQ method achieved an error of 0.04% and a processing time of 0.08 seconds (with 400 computational points), significantly outperforming the FD method, which yielded an 0.11% error and 0.12 seconds (with 800 points). The strong agreement between all three methods across five numerical examples confirms the robustness and reliability of the proposed analytical framework.

Keywords: Multiquadric meshless method, Finite Difference Method, inhomogeneous wave equation, Analytical solutions, Numerical method, Separation of variables.

Introduction: Solving partial differential equations (PDEs) is fundamental in engineering, especially fluid mechanics. Analytical solutions are often limited, particularly with complex boundary conditions. Thus, numerical methods have gained research interest. The wave equation, a second-order hyperbolic PDE, is widely used in physics and engineering. Various numerical approaches, including finite difference, finite volume, finite element, and boundary element methods, have been applied to solve this equation (Akbari and Pirzadeh 2022; Akbari and Pirzadeh 2023; Al-Taweel and Mu 2021; Younes et al. 2024).

Recent studies explore high-accuracy numerical solutions, such as wavelet methods, fourth-order discretization, and numerical techniques for nonlocal boundary conditions. While mesh-based methods require extensive preprocessing and computational effort, meshless methods offer a more efficient alternative. Among these, the radial basis function (RBF) method, particularly the multiquadric (MQ) method, has shown promise in solving PDEs without meshing (Kansa 1990; Kansa and Geiser 2013; Fallah et al. 2019; Babae et al. 2022).

Research on MQ method has improved accuracy and computational efficiency, optimizing shape parameters and domain decomposition techniques. This study compares the MQ method's accuracy and efficiency against the finite difference method and analytical solutions for the inhomogeneous wave equation. The results highlight the advantages and limitations of each method under different initial and boundary conditions.

The paper covers the governing equation, analytical solutions, numerical methods, and a comparative analysis of accuracy and efficiency.

Methodology: The wave equation is solved with different symmetric and asymmetric Neumann and Dirichlet boundary conditions using separation of variables (Eqs. (1)-(9)). A variable change is introduced to simplify the problem and eliminate non-zero boundary conditions (Eq. (10)). The new initial value problem can then be solved using separation of variables. The result is obtained by solving the eigenvalue system, leading to a unique solution for the wave equation. This solution satisfies the boundary conditions and can be expressed as a series solving the non-conservative wave equation (Eqs. (18)-(21)).

The finite difference method (FDM) is introduced as a numerical solution technique for the wave equation. In FDM, time and space are discretized into equal subintervals, and derivatives are approximated using finite differences. The equation is then solved for the function at future time steps using a leapfrog method (Eq. (28)). The stability of explicit methods like FDM is governed by the Courant number, which must be less than or equal to 1 for stability.

Lastly, the meshless multiquadric method, which uses RBFs, is discussed (Section 3-3). Unlike mesh-based methods, this approach uses distributed points that don't require connectivity, making it suitable for complex geometries. The method is flexible in both 2D and 3D problems but requires careful selection of the shape parameter to balance accuracy and computational efficiency. An optimal shape parameter can be determined through the algorithm by Falah et al. (2019).

Results and Discussion: The finite difference and meshless multiquadric methods are compared with their respective analytical solution, assuming a CFL number of 0.5. For the meshless multiquadric method, the shape parameter is adaptively determined. For comparison, three examples have been adopted by imposing different boundary conditions.

Example 1: Dirichlet Boundary Conditions

A Gaussian wave is used as the initial condition over a 500m domain. Numerical results from both methods are compared with the analytical solution (Figs. 6-7 and Table 1). The meshless method used 400 overlapping points, while the finite difference method had 800 grid points. Processing times were 0.08s and 0.1s, respectively. The meshless method had half the numerical error of the finite difference method, proving its superiority.

Example 2: Neumann Boundary Conditions

Using the same initial condition as Example 1, Neumann boundary conditions are applied. The meshless method again showed better accuracy, with an RMSE of 0.0107% versus 0.0259% for the finite difference method (Figs. 4-5 and Table 1). Processing times were similar, at 0.081s and 0.12s, respectively.

Example 3: Asymmetric Boundary Conditions

Three cases were considered:

- ◆ (3-a): Gaussian initial condition with a zero-gradient Neumann boundary condition.
- ◆ (3-b): Zero initial condition with a constant gradient Neumann boundary condition.
- ◆ (3-c): Zero initial condition with a sinusoidal Neumann boundary condition.

For these cases, the meshless method used 400, 51, and 51 points, while the finite difference method used 800, 251, and 251 points. The meshless method showed lower RMSE values and faster computation times, confirming its suitability for asymmetric boundary problems (Figs. 8-13 and Table 1).

Overall, the meshless multiquadric method consistently outperformed the finite difference method in terms of both accuracy and computational efficiency, making it a viable alternative for a variety of boundary conditions.

Conclusion: This study compares the finite difference and meshless multiquadric methods for solving the second-order inhomogeneous wave equation. For comparison, an analytical solution was also derived using the separation of variables for various initial and boundary conditions, including Dirichlet and Neumann conditions. Results show that both numerical methods perform well; however, the meshless multiquadric method achieves relatively lower error with similar computational cost. Optimal shape parameters were identified, reducing iterations. This highlights the method's efficiency in solving hyperbolic equations.



This is an open access article distributed under the terms and conditions of the Creative Commons Attribution 4.0 International (CC BY 4.0 license) (<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>)

حل معادله موج مرتبه دوم ناهمگن با شرایط مرزی نامتقارن

نسرین توکلی^۱، رضا بابایی^۲، احسان جبباری^{۳*}

^۱دانش‌آموخته کارشناسی ارشد مهندسی عمران، دانشکده فنی و مهندسی، دانشگاه قم، قم، ایران.

^۲دانش‌آموخته دکتری مهندسی عمران، دانشکده فنی و مهندسی، دانشگاه قم، قم، ایران.

^۳دانشیار گروه مهندسی عمران، دانشکده فنی و مهندسی، دانشگاه قم، قم، ایران.

پست الکترونیکی نگارنده مسئول: e.jabbari@qom.ac.ir

وبگاه نشریه: ijwer.uoz.ac.ir



تاریخ دریافت: ۱۴۰۴/۰۲/۲۱ تاریخ پذیرش: ۱۴۰۴/۰۷/۰۴

تاریخ ویرایش: ۱۴۰۴/۰۵/۱۴ تاریخ چاپ: ۱۴۰۲/۰۷/۰۱

چکیده: پاسخ معادله موج مرتبه دوم ناهمگن، به‌عنوان یک ابزار تحلیلی، امکان شبیه‌سازی بسیاری از پدیده‌ها در حوزه‌های مهندسی آب، سیالات و هیدرولیک را فراهم می‌آورد. کاربرد این رویکرد را می‌توان در تحلیل اندرکنش سد و مخزن تحت اثر بارهای دینامیکی، مدل‌سازی انتشار امواج سونامی و بررسی انتقال آلودگی در محیط‌های آبی مشاهده کرد؛ از این رو، توسعه و به‌کارگیری روش‌های تحلیلی برای حل این معادله، نقش بسزایی در مواجهه با چالش‌های پیچیده و ارائه راهکارهای مؤثر در این زمینه‌ها ایفا می‌کند. در این پژوهش یک حل تحلیلی بر پایه جداسازی متغیرها که با شرایط مرزی خاص و جدید به‌کار گرفته شده، ارائه شد. در این راستا، مسائل مقدار اولیه و شرایط مرزی متقارن و نامتقارن، همچنین مسائل مقدار مرزی با شرایط مرزی نامتقارن در دو حالت مستقل و وابسته به زمان مورد مطالعه قرار گرفت. همچنین، کارایی دو روش عددی بدون شبکه‌ی چندربعی و با شبکه‌ی اختلاف محدود، ارزیابی شد. پاسخ‌های حل تحلیلی ارائه‌شده در این پژوهش به‌عنوان معیاری برای سنجش سرعت و دقت روش‌های عددی مورد استفاده قرار گرفت. به‌عنوان نمونه در مثالی، خطای روش چندربعی برای حالت خاصی از شرایط مرزی، ۰/۰۴ درصد و برای روش اختلاف محدود ۰/۱۱ درصد به‌دست آمد. زمان پردازش برای همین مثال و به‌ازای دو روش مذکور به‌ترتیب ۰/۰۸ و ۰/۱۲ ثانیه محاسبه شد. در همین مثال تعداد نقاط محاسباتی موردنیاز روش‌های عددی یادشده به‌ترتیب برابر ۴۰۰ و ۸۰۰ انتخاب شده بود. همچنین انطباق مناسب پاسخ‌های سه روش نامبرده در پنج مثال عددی، اعتبار حل تحلیلی پیشنهادی پژوهش را نمایان می‌سازد.

کلیدواژه‌گان: روش بدون شبکه چندربعی، روش اختلاف محدود، معادله موج ناهمگن، حل تحلیلی، روش جداسازی متغیرها.

۱- مقدمه

از این رو، حل عددی این معادلات، به‌ویژه در حوزه مهندسی آب، سیالات و هیدرولیک از اهمیت بسزایی برخوردار است. در اغلب موارد، حل دقیق^۱ معادلات بسیار محدود است و محدودیت آن‌ها با اعمال شرایط مرزی^۲ افزایش می‌یابد.

فرمول‌بندی قوانین پایه فیزیک و علوم مهندسی، به‌طور معمول به معادلات مشتق جزئی منجر می‌شود.

² Boundary conditions

¹ Exact solution

در پژوهشی دیگر، ارزیابی حل تحلیلی و عددی معادله موج در میدان حل متغیر زمانی مورد بررسی قرار گرفت و حرکت موج با استفاده از روش تحلیلی دالامبر و روش عددی جهش نقطه میانی برای شرایط اولیه و مرزی مشخص شبیه‌سازی شد (Samadi Rahim 2016). با استفاده از روش برهم‌نهی موجی نیز به حل عددی معادله موج پرداخته شده است (Nourani 2018). دقت و همگرایی روش‌های عددی به‌خصوص روش اختلاف محدود در معادله موج یک‌بعدی با در نظر گرفتن وضعیت نگه‌دارنده غیرمحلی نیز مورد بررسی قرار گرفته است (Rizehvandi 2019).

از روش اختلاف محدود نیز توسط برخی محققین برای حل معادله موج دوبعدی با موفقیت استفاده شده است. (Shokri 2020). اخیراً، یک روش عددی جدید برای حل معادله موج طراحی و کارایی، دقت و نوآوری آن در مقایسه با سایر مطالعات نشان داده شده است (Gao and Hua 2023). از قابلیت‌های محاسباتی Matlab هم برای حل عددی معادله موج استفاده شد و به پیشرفت و شبیه‌سازی دقیق‌تر روش‌های محاسباتی منجر شد (Shior et al. 2024). اخیراً یک روش تفاضلی جدید هم با استفاده از تبدیل انتگرالی لاگر برای حل معادله موج مرتبه دوم پیشنهاد شده است که دقت پاسخ‌ها را افزایش می‌دهد (Mastroyukov 2024).

همان‌طور که مشاهده می‌شود، مطالعات و پژوهش‌های زیادی در زمینه حل عددی معادله موج با شرایط مرزی مختلف انجام شده است که بیشتر آن‌ها از روش‌های باشبکه استفاده نموده‌اند. در روش‌های عددی با شبکه، مسئله به کمک شبکه‌بندی به قسمت‌های کوچک‌تر یا نقاط مشخص تقسیم شده و معادله دیفرانسیل حاکم برای هر شبکه محاسبه و با جمع روابط جبری هر شبکه، کل مسئله شبیه‌سازی می‌شود. به همین دلیل، روش‌های با شبکه هزینه پیش‌پردازش شبکه‌بندی و حجم محاسبات بالایی دارند.

به‌طور مثال یک معادله مشتق جزئی با شرایط مرزی دیریکله^۱ ممکن است دارای حل تحلیلی باشد اما همان معادله با شرایط مرزی نیومن^۲ ممکن است حل دقیق نداشته باشد. از این‌رو توسعه روش‌های دقیق و عددی برای حل معادلات مشتق جزئی یکی از موضوعات جذاب در پژوهش‌های ریاضی، مهندسی و عددی است.

یکی از معادلات مشتق جزئی مشهور، معادله موج^۳ است. این معادله از نوع هذلولوی مرتبه دوم در حوزه زمان است که در زمینه‌های مختلف علمی از جمله انتقال آب بسیار کاربرد دارد و حل آن نیازمند طراحی روش‌هایی است که بتواند گرادینان‌های شدید را به‌دوراز نوسان و با دقت کافی شبیه‌سازی کند.

تاکنون روش‌های عددی و تحلیلی مختلفی برای حل معادلات از نوع نامبرده به‌کار گرفته شده است که از جمله آن‌ها می‌توان به روش‌های با شبکه اختلاف محدود^۴، حجم محدود^۵، اجزاء محدود^۶، اجزاء مرزی^۷ و غیره اشاره کرد (Akbari and Pirzadeh 2022; Akbari and Pirzadeh 2023; Al-Taweel and Mu 2021; Younes et al. 2024). در این راستا، برخی روش‌های عددی و تحلیلی برای معادلات پیشروی موج بررسی شده و از روش اختلاف محدود با دقت مرتبه چهار، در زمان و مکان با دقت خوبی استفاده شده است (Mossberg 2008). مطالعاتی بر روی روش‌های گسسته‌سازی مرتبه چهار معادلات دیفرانسیل در حوزه متغیر زمانی انجام شده است (Geiser 2008). همچنین با استفاده از روش موجک برای حل عددی معادله موج با شرایط مرزی نیومن، یک روش عددی با دقت بالا توسعه داده شده است (Choudhury 2014). اخیراً یک تکنیک عددی جدید نیز برای حل معادله موج با شرایط مرزی غیرمحلی استفاده شده است. نتایج عددی آن نشان می‌دهد که مجموع سری‌های تقریب به‌سرعت همگرا بوده و از دقت قابل قبولی در مقایسه با نتایج حل دقیق برخوردار است (Cheniguel 2013).

⁶ Finite Element (FE)

⁷ Boundary Element (BE)

¹ Dirichlet

² Neumann

³ Wave equation

⁴ Finite Difference (FD)

⁵ Finite Volume (FV)

همچنین در سال‌های اخیر از الگوریتم‌های هوشمند برای یافتن متغیرشکل بهینه استفاده شده است تا حجم محاسبات کاهش یابد (Babae et al. 2022; Bacar and Rawhoudine 2024). علاوه بر این، از توابع پایه شعاعی برای حل مسائل مقدار اولیه، با تأکید بر انطباق‌پذیری آن‌ها با مراکز محاسباتی نیز استفاده شده است (Gu and Jung 2020). اخیراً، یک الگوریتم انطباقی جدید برای توزیع بهینه مراکز محاسباتی در روش بدون شبکه چندربعی ارائه گردیده که دقت و سرعت روش چندربعی را نسبت به توزیع یکنواخت در مسائل ناپایا به میزان قابل توجهی بهبود می‌بخشد (MohammadAlian et al. 2023).

پژوهش حاضر، در ادامه مطالعات پیشین به حل معادله موج در حوزه زمان پرداخته است. به این منظور، هم مسائل مقدار مرزی و هم مسائل مقدار اولیه بررسی می‌شود. در مسائل شرایط مرزی، مرزهای ضروری^۵ و طبیعی^۶ هم به صورت متقارن و هم به صورت نامتقارن مورد هدف قرار گرفته است. شرایط مرزی وابسته به زمان نیز به منظور ارزیابی بیشتر در نظر گرفته می‌شوند. برای حل مسائل منتخب از سه روش؛ تحلیلی، اختلاف محدود و چندربعی استفاده می‌شود. در این راستا، ابتدا برای مسائلی که حل دقیق آن‌ها موجود نیست، یک حل تحلیلی با استفاده از روش جداسازی متغیرها در شرایط مرزی خاص و جدید ارائه می‌شود، سپس یک الگوریتم عددی بدون شبکه با روش چندربعی برای همه مسائل ارائه می‌شود که در آن بهینه‌سازی پارامتر شکل نیز مورد تأکید قرار می‌گیرد و در پایان معادلات اختلاف محدود مناسب به همراه شرایط پایداری، بیان می‌شوند. با این روند، دقت و کارایی روش‌های عددی حاضر در مقایسه با پاسخ‌های روش تحلیلی آشکار خواهد شد و نقاط قوت روش بدون شبکه چندربعی مورد تأکید قرار خواهد گرفت.

۲- روش‌شناسی

۲-۱- معادلات حاکم

با وجود پیشرفت‌های حاصل‌شده در سال‌های اخیر، روش‌های بدون شبکه کارآمدی برای حل معادلات مشتق جزئی پیشنهاد شده‌اند که در آن‌ها به شبکه‌بندی کل دامنه مسئله نیازی نیست. از این رو حجم محاسبات آن‌ها نسبت به روش‌های با شبکه کاهش می‌یابد. به این ترتیب، توسعه روش‌های بدون شبکه مورد توجه بسیاری از محققان قرار گرفته‌اند. در این میان، روش چندربعی^۱ که مهم‌ترین زیرمجموعه روش‌های توابع پایه شعاعی^۲ است، در پژوهش حاضر مورد بررسی قرار گرفته است.

کانزا برای اولین بار از این روش برای حل معادله‌های دیفرانسیل هذلولوی، سهموی و بیضوی استفاده و متغیرشکل^۳ را به عنوان مهم‌ترین عامل در دقت این روش معرفی کرد (Kansa 1990). در ادامه، معادله برگرز سه‌بعدی با روش چندربعی حل شد و با به کارگیری روش تجزیه دامنه^۴، پیچیدگی هندسی دامنه‌های بزرگ کاهش پیدا کرده و تعداد زیادی از درایه‌های ماتریس ضرایب صفر می‌شود (Kansa and Geiser 2013). روش نامبرده برای حل مسائل مقدار مرزی نیز توسعه داده شده است (Ali et al. 2021; Chen et al. 2024). ترکیب روش چندربعی با روش‌های دیگر نیز به افزایش مزایای آن منجر شده است. به عنوان مثال، اخیراً فرمولاسیونی از این روش به همراه روش اختلاف محدود برای گسسته‌سازی مشتقات در معادلات مشتق جزئی ارائه شده است (Soleymani and Zhu 2021). در سال ۲۰۱۹، برای نخستین بار، روش چندربعی برای تحلیل تراوش در دامنه‌های دوبعدی و سه‌بعدی به کار برده شد و برای تعیین متغیرشکل بهینه یک الگوریتم بهینه‌سازی سریع معرفی گردید که زمان محاسبات را به طور چشمگیری کاهش می‌دهد (Fallah et al. 2019). روش چندربعی برای حل معادله موج به منظور آنالیز امواج لرزه‌ای در مخازن سدهای صلب در حوزه فرکانس نیز به کار برده شد و نشان داده شد که کاربرد روش چندربعی در این مسئله خاص نسبت به سایر روش‌ها آسان‌تر و کم‌هزینه‌تر است و هم‌چنین یک الگوریتم جدید و پرسرعت برای تعیین متغیرشکل بهینه ارائه گردید (Babae et al. 2019).

⁴ Domain decomposition

⁵ Essential (Dirichlet)

⁶ Natural (Neumann)

¹ Multiquadric (MQ)

² Radial Basis Functions (RBF)

³ Shape parameter

$$u(x, t) = X(x)T(t) \quad (3)$$

با جایگذاری رابطه (3) در رابطه (1) نتیجه می‌شود:

$$X(x)T''(t) = c^2 X''(x)T(t) \quad (4)$$

که با تقسیم هر دو طرف معادله بر $c^2 X(x)T(t)$ نتیجه می‌دهد که:

$$\frac{T''(t)}{c^2 T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} \quad (5)$$

از آنجایی که طرف چپ این رابطه فقط به t و طرف راست آن تنها به x وابسته است، پس مقدار دو طرف باید برابر با عددی ثابت باشد. هدف یافتن پاسخی غیرصفر برای تابع $u(x, t)$ است که شرایط اولیه و مرزی را ارضا کند. این عدد ثابت در سه حالت مثبت، منفی و صفر بررسی شده و مقداری مانند ξ - که از آن اغلب به‌عنوان ثابت جداسازی متغیرها یاد می‌شود، در نظر گرفته می‌شود. بنابراین داریم:

$$\frac{T''(t)}{c^2 T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\xi \quad (6)$$

از رابطه (6) دو معادله دیفرانسیل معمولی¹ برای $T(t)$ و $X(x)$ به‌صورت زابطه (7) حاصل می‌شود:

$$\begin{aligned} T''(t) + \xi c^2 T(t) &= 0 \\ X''(x) + \xi X(x) &= 0 \end{aligned} \quad (7)$$

این دو معادله به‌عنوان معادلات جداسازی شده همگن شناخته می‌شوند و می‌توانند به‌صورت مستقل حل شوند. پاسخ عمومی این دو معادله وابسته به ξ است و به‌ازای $\xi \geq 0$ راه‌حل مسئله به شکل رابطه (8) نوشته می‌شود:

$$\begin{aligned} X(x) &= A \cos(kx) + B \sin(kx) \\ T(t) &= C \cos(ckt) + D \sin(ckt) \end{aligned} \quad (8)$$

که در آن، A, B, C, D ثابت‌هایی هستند که توسط شرایط مرزی یا اولیه تعیین می‌شوند و ثابت k با رابطه $\xi = k^2$ تعریف می‌شود. حل کلی معادله ناهمگن (2) با فرض $f(x, t) \neq 0$ اغلب به‌صورت (9) نوشته می‌شود:

$$u(x, t) = u_h(x, t) + u_p(x, t) \quad (9)$$

که در آن، $u_h(x, t)$ حل مسئله همگن و $u_p(x, t)$ یک حل

معادله موج یک معادله مشتق جزئی است که رفتار موج‌ها شامل موج‌های صوتی، نوری و آبی را توصیف می‌کند. این معادله، مشتق دوم تابع موج نسبت به زمان را به مشتق دوم تابع موج نسبت به مکان مربوط می‌سازد. شکل کلی معادله موج مرتبه دوم در حوزه زمان به‌صورت رابطه (1) است.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (1)$$

که در آن، $u(x, t)$ تابع پاسخ است که می‌تواند ارتفاع موج و یا فشار هیدرودینامیک باشد. c سرعت صوت در سیال و x و t به‌ترتیب متغیرهای مکان و زمان هستند.

این معادله می‌تواند به‌صورت تحلیلی برای شرایط مرزی و هندسه‌های ساده حل شود، اما برای مسائل پیچیده‌تر تنها روش‌های عددی برای حل آن کارساز هستند.

معادله موج برای دامنه وسیعی از پدیده‌ها، شامل موج‌های الکترومغناطیسی، موج‌های زلزله و دینامیک سیالات و ... به‌کار می‌رود. در هریک از این موارد، خواص محیطی که موج‌ها در آن انتشار می‌یابند، در معادله اعمال می‌شود. به‌عنوان مثال معادله موج در مسائل ناهمگن، به شکل رابطه (2) خواهد بود:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t) \quad (2)$$

که در آن، $u(x, t)$ متغیر هدف و $f(x, t)$ نشان‌دهنده منبع تحریک است.

۲-۲- حل دقیق با روش جداسازی متغیرها

روش جداسازی متغیرها روشی ریاضی و دقیق برای حل معادلات مشتق جزئی است. این روش با فرض اینکه تابع پاسخ می‌تواند به‌صورت حاصل‌ضرب دو یا چند تابع با متغیرهای جداگانه نوشته شود، به‌کار گرفته می‌شود. این روش به‌طور معمول برای حل معادلات دیفرانسیل خطی مانند معادله موج کاربرد دارد.

برای یافتن پاسخ تحلیلی معادله همگن (1) با استفاده از روش جداسازی متغیرها، فرض می‌شود که پاسخ می‌تواند به‌صورت حاصل‌ضرب دو تابع به شکل زیر نوشته شود:

¹ Ordinary Differential Equation (ODE)

(۱۴) به دست می‌آید.

$$G(x, t) = f(x, t) - \frac{x^2}{2L} g_{tt}(t) + \frac{c^2}{L} g(t) \quad (14)$$

واضح است که حل رابطه (۱۳) با روش جداسازی متغیرها به سادگی قابل انجام است. در حقیقت با به دست آوردن $z(x, t)$ متعاقباً $u(x, t)$ نیز با استفاده از رابطه (۱۱) به دست خواهد آمد. به این منظور، با یادآوری دستگاه مقادیر ویژه (۶) و با توجه به شرایط مرزی در رابطه (۱۳) نتیجه می‌شود:

$$\begin{aligned} X''(x) + \xi X(x) &= 0 \\ X(0, t) &= 0 \\ X'(L, t) &= 0 \end{aligned} \quad (15)$$

که در آن، X و ξ به ترتیب تابع ویژه و مقادیر ویژه هستند که به صورت رابطه (۱۶) به دست می‌آید:

$$\begin{aligned} \xi &= k^2 = \frac{(2n+1)^2 \pi^2}{L^2} \\ X(x) &= \sin\left(\frac{(2n+1)\pi x}{L}\right), n \geq 1 \end{aligned} \quad (16)$$

با استفاده از رابطه (۱۶) و توجه به اینکه $z(x, t) = Z(t)X(x)$ می‌توان نوشت:

$$z(x, t) = \sum_{n \geq 0} Z_n(t) \sin\left(\frac{(2n+1)\pi x}{L}\right) \quad (17)$$

با جایگذاری معادله (۱۷) در معادله (۱۳)، نتیجه می‌شود:

$$\sum_{n \geq 0} \left\{ \left[Z_n''(t) + Z_n(t) \frac{c^2(2n+1)^2 \pi^2}{L^2} \right] \times \sin\left(\frac{(2n+1)\pi x}{L}\right) \right\} = G(x, t) \quad (18)$$

و همچنین برای جمله چشمه در سمت راست معادله (۱۸) می‌توان انتظار داشت که:

$$G(x, t) = G(t)X(x) \quad (19)$$

بنابراین با توجه به روابط (۱۶) و (۱۹) خواهیم داشت:

$$G(x, t) = \sum_{n \geq 0} G_n(t) \sin\left(\frac{(2n+1)\pi x}{L}\right) \quad (20)$$

با جایگذاری معادله (۱۸) در رابطه (۲۰) داریم:

خصوصی برای قسمت غیرهمگن است. به عنوان مثال، برای یک معادله ناهمگن اگر فرض شود که $f(x, t) = F(x)G(t)$ ، در این صورت می‌توان یک راه‌حل به شکل $u_p(x, t) = X_p(x)T_p(t)$ با استفاده از روش جداسازی متغیرها به دست آورد. به طور کلی، این پاسخ، رفتار یک موج با جملات چشمه را توصیف می‌کند. با این اوصاف، می‌توان رفتار موج در هر نقطه‌ای از مکان و زمان را با توجه به شرایط اولیه و مرزی و جمله چشمه به صورت دقیق پیش‌بینی نمود. در ادامه پاسخ‌های دقیقی برای اولین بار برای معادله موج با توجه به شرایط مرزی و اولیه متفاوت به دست می‌آید.

برای حل معادله (۲) با شرایط اولیه و شرایط مرزی نامتقارن مطابق با رابطه (۱۰) باید از یک تغییرمتغیر به نحوی استفاده کرد که شرط مرزی نیومن غیرصفر را به صفر تبدیل کند.

$$\begin{aligned} u(0, t) &= 0 \\ u_x(L, t) &= g(t) \\ u(x, 0) &= g_1(x) \\ u_t(x, 0) &= g_2(x) \end{aligned} \quad (10)$$

به این منظور ابتدا تغییر متغیر رابطه (۱۱) با هدف ساده‌سازی یا صفر کردن شرط مرزی مکانی نیومن؛ $u_x(L, t) = g(t)$ پیشنهاد می‌شود:

$$z(x, t) = u(x, t) - \frac{x^2}{2L} g(t) \quad (11)$$

با جایگزینی شرط مرزی مکانی نیومن نامبرده در مشتق اول مکانی رابطه (۱۱) خواهیم داشت:

$$z_x(L, t) = 0 \quad (12)$$

به این ترتیب، معادلات و شرایط مرزی مورد بحث به صورت رابطه (۱۳) بازنویسی خواهند شد:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} &= G(x, t) \quad 0 < x < L, t > 0 \\ z(0, t) &= 0 \\ z_x(L, t) &= 0 \\ z(x, 0) &= v(x) \\ z_t(x, 0) &= w(x) \end{aligned} \quad (13)$$

در رابطه (۱۳)؛ $G(x, t)$ بعد از اعمال رابطه (۱۱) مطابق با

استفاده از روش اختلاف محدود در حل معادله موج، ابتدا جملات زمانی و مکانی گسسته‌سازی می‌شوند. به این منظور، بازه زمانی $[0, T]$ به N زیربازه با فواصل یکسان Δt و بازه مکانی $[0, L]$ به M زیربازه با فواصل Δx تقسیم می‌شوند، سپس مشتقات مرتبه دوم با استفاده از روش اختلاف محدود تخمین زده می‌شود. مشتق دوم تابع موج نسبت به x به شکل اختلاف مرکزی عبارت است از:

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right) \approx \frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{\Delta x^2} \quad (24)$$

و مشتق مرتبه دوم تابع موج نسبت به t نیز به شکل زیر نوشته می‌شود:

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right) \approx \frac{u_i^{n+1} - 2u_i^n + u_i^{n-1}}{\Delta t^2} \quad (25)$$

جملات چشمه نیز به صورت زیر قابل بیان است:

$$f(x, t) \approx f_i^n \quad (26)$$

جایگذاری روابط (24) و (25) در معادله (2)، رابطه (27) را نتیجه می‌دهد:

$$\frac{u_i^{n+1} - 2u_i^n + u_i^{n-1}}{\Delta t^2} = -c^2 \frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{\Delta x^2} + f_i^n \quad (27)$$

رابطه فوق یک معادله گسسته صریح است که ارتباط مقادیر u در پنج نقطه مجاور در مکان و زمان را نشان می‌دهد. هم‌چنین، این معادله را می‌توان برای تنها مجهول آن یعنی u_i^{n+1} به فرم زیر بازنویسی کرد:

$$u_i^{n+1} = 2u_i^n - u_i^{n-1} - \frac{c^2 \Delta t^2}{\Delta x^2} (u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n) + f_i^n \quad (28)$$

که رابطه‌ای برای محاسبه مقدار u در گام زمانی بعدی را در قالب مقادیر آن در مراحل زمانی قبلی و هم‌چنین در نقاط مجاور مکانی ارائه می‌دهد.

۳-۲- پایداری

پایداری روش‌های صریح^۱ برای حل معادله موج وابسته به

$$Z_n''(t) + \frac{c^2(2n+1)^2\pi^2}{L^2} Z_n(t) = G_n(t) \quad (21)$$

که یک معادله دیفرانسیل معمولی است. این معادله دارای دو جواب عمومی و خصوصی است که به راحتی قابل محاسبه هستند. پس از محاسبه $Z_n(x)$ تابع $z(x, t)$ به دست می‌آید که به کمک آن و با استفاده از رابطه (۱۱) پاسخ معادله موج ناهمگن با شرایط مرزی نامتقارن یعنی $u(x, t)$ تعیین می‌گردد.

لازم به ذکر است که اگر رابطه (۱۷) را در شرایط اولیه رابطه (۱۳) صدق دهیم خواهیم داشت:

$$\sum_{n \geq 0} c_n \sin\left(\frac{(2n+1)\pi x}{L}\right) v(x) = \sum_{n \geq 0} b_n \sin\left(\frac{(2n+1)\pi x}{L}\right) \quad (22)$$

که در آن داریم:

$$\begin{aligned} c_n &= Z_n'(0) \\ b_n &= Z_n(0) \end{aligned} \quad (23)$$

از طریق مشابه می‌توان معادله ناهمگن موج با شرایط مرزی دیریکله یا نیومن با مقادیر غیرصفر را طی یک تغییرمتغیر به حالت معادله با شرایط مرزی صفر تبدیل نمود و به سادگی آن را با روش جداسازی متغیرها حل کرد. در حقیقت در همه مسائل این پژوهش با به دست آوردن $Z_n(t)$ و $X(x)$ از طریق معادله دیفرانسیل معمولی متناظر، جواب مسئله ناهمگن موج قابل دستیابی است.

۳- حل عددی

۳-۱- روش اختلاف محدود

روش اختلاف محدود یک روش عددی محبوب است که برای حل معادلات مشتق جزئی، از جمله معادلات موج استفاده می‌شود. در این روش، مشتق‌ها در معادله مشتق جزئی پیوسته با اختلاف‌های محدود در نقاط مشخصی جایگزین می‌گردد. سپس مقادیر پاسخ در این نقاط از حل یک دستگاه معادلات جبری حاصل خواهد شد. برای

^۱Explicit

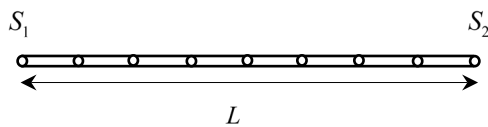


Fig. 1 Distribution of the computational centers both within and on the boundary in a one-dimensional domain in the Multiquadric method

شکل ۱ نمایش مراکز محاسباتی در داخل و روی مرز یک میدان یک‌بعدی در روش چندربعی

تابع تخمین چندربعی برای مسائل مختلف یک‌بعدی در حوزه زمان طبق رابطه (۳۰) تعریف می‌شود:

$$f(x, t) = \sum_{j=1}^n \lambda_j(t) \sqrt{(x - x_j)^2 + c_{sp}^2} \quad (30)$$

که در آن، x مختصات نقاط برهم‌نهی^۳، x_j مختصات نقاط گوسی^۴ (مراکز محاسباتی)، $\lambda_j(t)$ ضرایب مجهول در هر گام زمانی، N تعداد کل نقاط محاسباتی در داخل دامنه و روی مرزها و c_{sp} متغیرشکل می‌باشند. نقاط روی مرز برای اعمال شرایط مرزی مسئله و نقاط داخل میدان برای ارضاء معادلات دیفرانسیل پاره‌ای حاکم بر دامنه محاسباتی در نظر گرفته می‌شوند. نقاط گوسی با پراکندگی دلخواه در نظر گرفته می‌شوند و تعداد آن‌ها با تعداد مجهولات یا $\lambda_j(t)$ برابر است. متغیرشکل در دقت پاسخ‌ها و کارایی روش چندربعی بسیار تعیین‌کننده است. تا به امروز نتایج نظری کاملی برای انتخاب مقدار بهینه متغیرشکل بیان نشده است و برای انتخاب مقدار بهینه آن مطالعات فراوانی در حال انجام است. در این پژوهش، متغیرهای شکل بهینه برای هر کدام از مثال‌های عددی با استفاده از الگوریتمی شناخته شده (Fallah et al 2019) به‌دست می‌آید و مورد بحث و بررسی قرار می‌گیرد. لازم به ذکر است که الگوریتم اشاره‌شده یک روش جستجو به‌شمار می‌رود و باعث کاهش حجم محاسبات می‌شود.

اعمال شرایط مرزی و ارضاء معادله دیفرانسیل حاکم در مراکز نامبرده با استفاده از تابع چندربعی به یک دستگاه

طول گام‌های زمانی و مکانی است. روش اختلاف محدود استفاده‌شده در این پژوهش یک روش اختلاف مرکزی صریح با پایداری مشروط است. پایداری این روش به مقدار عدد کورانت^۱ وابسته است که برای معادله موج به شکل زیر تعریف می‌شود:

$$CFL = \frac{c\Delta t}{\Delta x} \quad (29)$$

برای پایداری روش گسسته سازی فوق (لیپ فراگ^۲) در حل معادله موج، عدد کورانت باید کمتر یا مساوی با یک باشد.

۳-۳- روش بدون شبکه چندربعی

تابع چندربعی معروف‌ترین زیرشاخه توابع پایه شعاعی است. این روش از طریق معرفی یک تابع تخمین پایه شعاعی و معرفی تعدادی نقاط توزیع‌شده در داخل دامنه و مرزهای مسئله به‌منظور ارضاء معادله دیفرانسیل و شرایط مرزی در آن نقاط، معادلات را به‌صورت عددی حل می‌کند. این گره‌های پخش‌شده در دامنه باعث ایجاد شبکه‌بندی نمی‌شود و فقط امکان تعریف تابع تخمین را فراهم می‌کند.

روش چندربعی دارای مزایایی هم چون ایجاد یک تابع پاسخ پیوسته در سراسر میدان محاسباتی، قابلیت بالا در شبیه‌سازی هندسه‌های نامنظم، استفاده از روش تجزیه دامنه برای تسهیل شبیه‌سازی مسائل با دامنه پیچیده، تعمیم آسان به مسائل سه‌بعدی و غیره است. در روش نامبرده، مراکز محاسباتی و برهم‌نهی هم در درون میدان و هم روی مرزها قرار می‌گیرند (شکل ۱). این نقاط برخلاف روش‌های با شبکه نیاز به ارتباط اولیه با یکدیگر ندارند لذا کاربرد روش نامبرده در هندسه‌های پیچیده و مسائل سه‌بعدی بسیار ساده است. توزیع نقاط محاسباتی، بسته به نوع هندسه و پدیده موردبررسی می‌تواند به‌صورت یکنواخت یا غیریکنواخت باشد.

⁴ Gaussian points

¹ Courant-Friedrichs-Lewy (CFL)

² Leap-Frog

³ Collocation points

$$a_n = \frac{2}{L} \int_0^L g_1(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx \quad (34)$$

همچنین $g_1(x)$ در رابطه (34) همان شرط اولیه (32) است. دامنه محاسباتی در روش اختلاف محدود با استفاده از 800 نقطه محاسباتی با فاصله یکسان گسسته‌سازی و تعداد نقاط برهم‌نهی نیز برای روش چندربعی برابر 400 نقطه تعیین گردید.

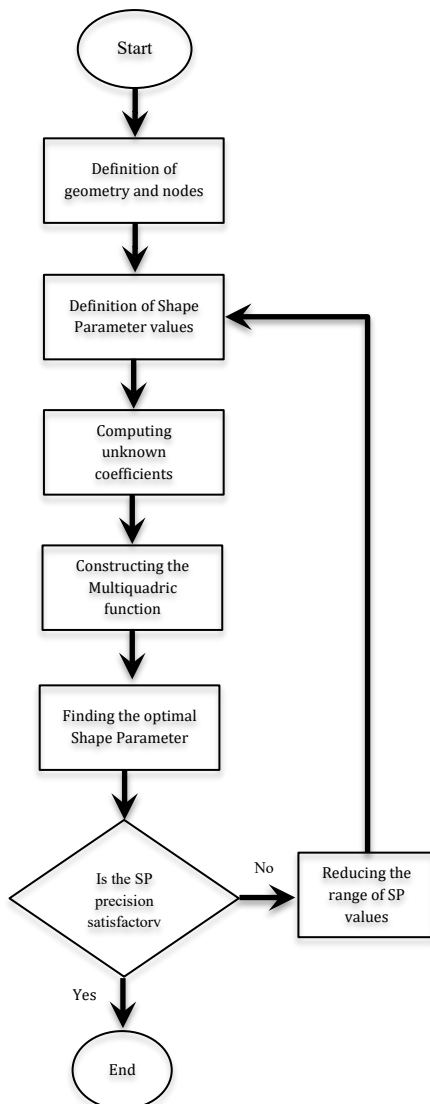


Fig. 2 Computational flowchart of the MQ method for solving the wave equation

شکل ۲ روندنمای (فلوچارت) محاسباتی روش چندربعی برای حل معادله موج

معادلات جبری مانند (31) در هر گام زمانی منتهی می‌گردد:

$$[A][\lambda] = [f] \quad (31)$$

پس از محاسبه ضرایب مجهول از دستگاه حاضر، تابع پیوسته چندربعی در هر گام زمانی به دست می‌آید که می‌توان با استفاده از آن جواب معادله در هر نقطه دلخواه از میدان محاسباتی را با دقت خوبی تخمین زد. روندنمای (فلوچارت) انجام محاسبات با روش بدون شبکه حاضر، در شکل ۲ آمده است.

۴- مثال‌های عددی

در این بخش، با استفاده از چند مثال عددی، کارایی روش‌های عددی اختلاف محدود و چندربعی در مقایسه با پاسخ‌های تحلیلی مورد ارزیابی قرار گرفته‌اند. در تمامی مثال‌ها مقدار عدد کورانت برابر با 0.5 و سرعت صوت در سیال 1400 متر بر ثانیه در نظر گرفته می‌شود. مقدار متغیرشکل نیز برای هر مسئله به صورت جداگانه تعیین گردیده است.

۴-۱- مثال یک: مسئله مقدار اولیه با شرایط مرزی متقارن از نوع دیریکله

شرایط اولیه و مرزی در این مثال در دامنه‌ای به طول 500 متر به صورت رابطه (32) تعریف می‌شود که از نوع دیریکله و متقارن هستند:

$$\begin{aligned} u(x, 0) &= e^{-\frac{(x-0.5L)^2}{200}} \\ u(0, t) &= u(L, t) = 0 \end{aligned} \quad (32)$$

همچنین نمودار شرایط اولیه در این مثال در شکل 3 به صورت یک موج با ارتفاع واحد نشان داده شده است. پاسخ دقیق معادله (1) با شرایط مرزی و اولیه (32) و با استفاده از روش جداسازی متغیرها به صورت رابطه (33) است:

$$u(x, t) = \sum_{n>1} \left(a_n \cos \left(\frac{n\pi c}{L} t \right) \sin \left(\frac{n\pi x}{L} \right) \right) \quad (33)$$

که در آن برای a_n خواهیم داشت:

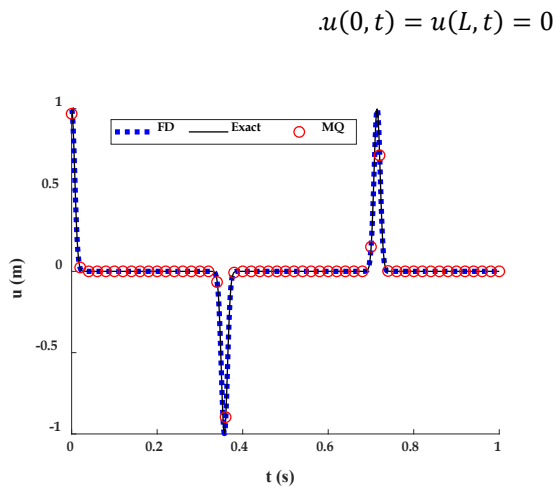


Fig. 4 Time history of the wave elevation at $x = 250$ for Example 1

شکل ۴ تغییرات ارتفاع موج بر حسب زمان در $(x = 250)$ در مثال شماره یک

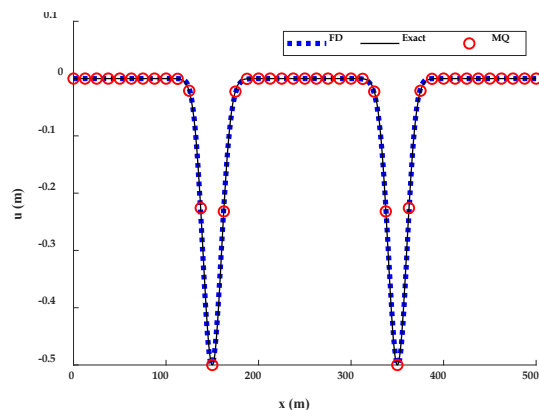


Fig. 5 Wave elevation at the domain length at $t = 1$, Example 1

شکل ۵ ارتفاع موج در طول دامنه در $t = 1$ ، مثال یک

جدول ۱ درصد خطای نسبی NRMSE برای روش‌های اختلاف محدود و چندربعی

Table 1 NRMSE Error (%) for Finite Difference and Multiquadric Methods

Method Example	MQ	FD	
One	0.0107	0.0259	
Two	0.0449	0.1160	
Three	(a)	0.0263	0.0563
	(b)	0.0042	0.0211
	(c)	0.0135	0.0161

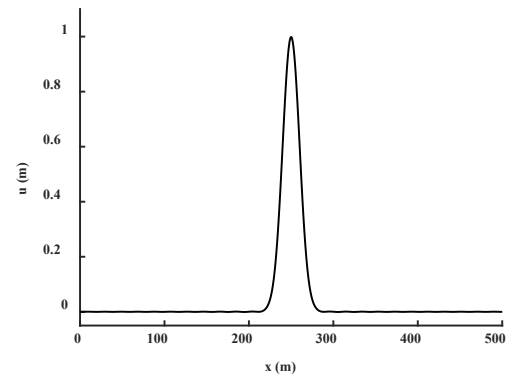


Fig. 3 Initial conditions for Examples 1, 2, and 3-a

شکل ۳ شرایط اولیه در مثال‌های یک، دو و حالت (الف) از مثال شماره سه

همچنین مقدار متغیر شکل بهینه برای روش بدون شبکه ۰/۰۸ به دست آمد و زمان پردازش^۱ روش چندربعی و اختلاف محدود به ترتیب برابر با ۰/۰۸ و ۰/۱ ثانیه مشاهده شد. مثال شماره یک با استفاده از سه روش دقیق، چندربعی و اختلاف محدود حل و نمودار پاسخ‌های آن در [شکل‌های ۴ و ۵](#) نشان داده شده است.

درصد خطای نسبی دو روش عددی نامبرده با استفاده از رابطه جذر میانگین مربعات (۳۵) در [جدول ۱](#) گزارش شده است.

$$NRMSE = \sqrt{\sum_i^N \frac{1}{N} \left(\frac{\hat{u}_i - u_i}{\hat{u}_i} \right)^2} \times 100 \quad (35)$$

همان‌طور که مشاهده می‌شود، خطای روش عددی بدون شبکه تقریباً نصف خطای روش اختلاف محدود است. با توجه به دقت، سرعت و تعداد مراکز محاسباتی گزارش شده در مثال شماره یک می‌توان گفت که روش بدون شبکه بر روش با شبکه برتری دارد.

۴-۱- مثال دو: مسئله مقدار اولیه با شرایط مرزی

مقارن از نوع نیومن

در این مثال، هندسه و شرایط اولیه همانند مثال شماره یک در نظر گرفته می‌شود ولی در این حالت، شرایط مرزی نیومن در دو انتهای دامنه به صورت مقارن انتخاب شده‌اند یعنی

¹ CPU runtime

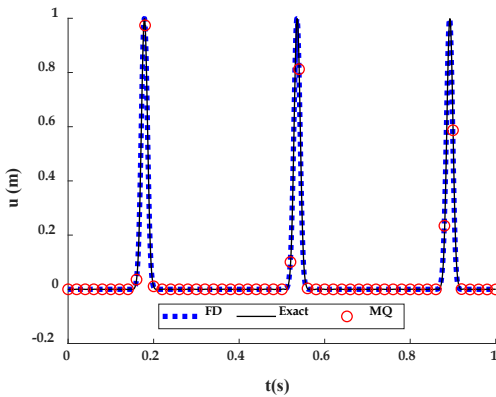


Fig. 7 Time history of wave elevation at $x = 250$, Example 2

شکل ۷ تغییرات ارتفاع موج بر حسب زمان در $x = 250$ مثال دو

۲-۴- مثال سه: مسائل با شرایط مرزی نامتقارن

در این مثال، شرایط مرزی نامتقارن در سه حالت مختلف (الف)، (ب) و (ج) بررسی می‌شود. طول دامنه محاسباتی در همه حالات برابر با مثال‌های قبل است و تعداد نقاط محاسباتی در روش چندربعی برای سه حالت مورد بحث به ترتیب برابر با ۵۱، ۴۰۰، ۵۱ و عدد در نظر گرفته شد. این مقادیر در روش اختلاف محدود به ترتیب ۸۰۰، ۲۵۱ و ۲۵۱ هستند که به صورت بهینه مورد استفاده قرار گرفته‌اند. مقدار درصد خطای نسبی جذر میانگین مربعات روش‌های عددی نسبت به روش دقیق برای همه حالات در جدول ۱ گزارش شده است.

الف: مسئله مقدار اولیه

در این حالت شرایط اولیه مسئله همانند مثال شماره یک و شرایط مرزی طبق رابطه (۳۹) در نظر گرفته می‌شود.

$$u(0, t) = 0, \quad u_x(L, t) = 0 \quad (39)$$

همان‌طور که مشخص است شرایط مرزی یکی از نوع دیریکله و دیگری از نوع نیومن هستند که با مقدار صفر تعریف شده‌اند. لازم به ذکر است که مقدار بهینه متغیر شکل برای روش چندربعی در حالت (الف) ۰/۲۵ به دست آمده است.

حل دقیق معادله (۱) با شرایط مرزی و اولیه عنوان شده و با استفاده از روش جداسازی متغیرها به صورت رابطه (۳۶) است:

$$u(x, t) = a_0 + \sum_{n>1} \left(a_n \cos\left(\frac{n\pi c}{L} t\right) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right) \quad (36)$$

که در آن:

$$a_0 = \frac{2}{L} \int_0^L e^{-\frac{(x-0.5L)^2}{200}} dx \quad (37)$$

$$a_n = \frac{2}{L} \int_0^L e^{-\frac{(x-0.5L)^2}{200}} \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx \quad (38)$$

تعداد مراکز محاسباتی در این مثال برابر با مثال شماره یک در نظر گرفته شده است که براساس آن، زمان پردازش روش بدون شبکه ۰/۸۱ و روش اختلاف محدود ۰/۱۲ ثانیه به دست آمده است.

پاسخ‌های عددی و دقیق مثال دوم در شکل‌های ۶ و ۷ آورده شده است. نتایج نشان می‌دهد که دقت و سرعت روش چندربعی در حل مسائل مقدار اولیه با شرایط مرزی متقارن از نوع نیومن نیز از روش اختلاف محدود بیشتر است. همچنین انطباق پاسخ سه روش نشان می‌دهد که پاسخ دقیق پیشنهادی این پژوهش از اعتبار قابل قبولی برخوردار است.

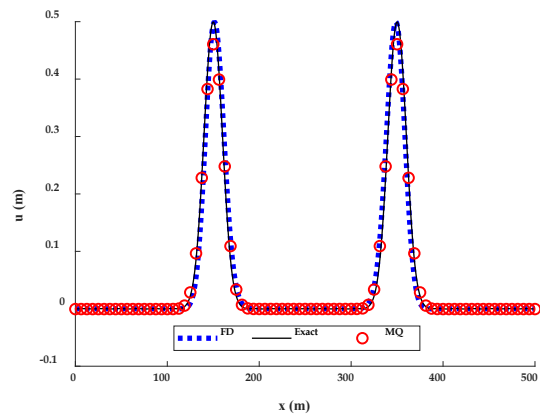


Fig. 6 Wave elevation at the domain length at $t = 1$, Example 2

شکل ۶ ارتفاع موج در طول دامنه در زمان $t = 1$ مثال دو

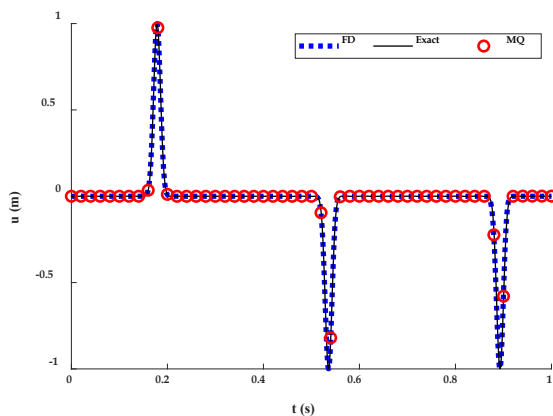


Fig. 8 Time history of wave elevation at $x = 250$, Example 3-a

شکل ۸ تغییرات ارتفاع موج برحسب زمان در $x = 250$ در حالت (الف) از مثال شماره سه

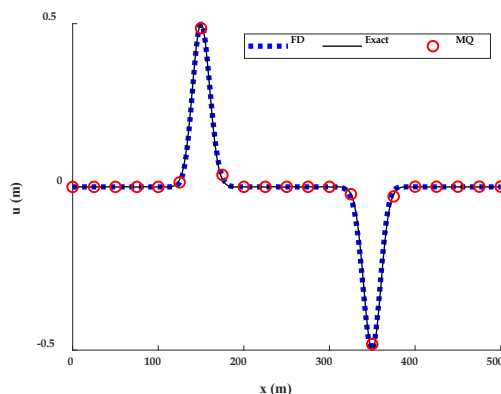


Fig. 9 Wave elevation at the domain length at $(t = 1)$ in Example 3-a

شکل ۹ ارتفاع موج در طول دامنه در زمان $(t = 1)$ در حالت (الف) از مثال شماره سه

چون گرادیان در انتهای دامنه در حالت (الف) برابر با صفر است، مقدار اولیه با سرعت ثابت شروع به انتقال به دو سمت دامنه خواهد کرد. وقتی این موج به انتهای دامنه برخورد می‌کند بدون تغییر به درون دامنه منتقل می‌گردد.

نتایج روش‌های عددی و دقیق برای حالت (ب) از مثال سوم به ترتیب در [شکل‌های ۱۰](#) و [۱۱](#) آمده است. لازم به ذکر است که مقدار بهینه متغیرشکل برای روش چندربعی در حالت (ب) از مثال سوم برابر ۵۱ به دست آمده است.

در حالت (ب)، گرادیان مرز سمت چپ با یک شیب ثابت اعمال شده است. بنابراین با توجه به صفر بودن شرایط اولیه،

ب: مسئله مقدار مرزی (اندرکنش دینامیکی سد صلب و مخزن یک‌بعدی با شتاب ثابت)

شرایط اولیه در این حالت در طول دامنه صفر فرض می‌شود یعنی:

$$u(x, 0) = 0 \quad (40)$$

شرایط مرزی این مسئله نیز به صورت رابطه (۴۱) است:

$$u(0, t) = 0, \quad u_x(L, t) = \rho g \quad (41)$$

شرط مرزی نیومن در این مسئله برابر با یک مقدار ثابت و برابر با مقدار ρg در نظر گرفته شده است که در آن، ρ و g به ترتیب برابر با ۱۰۰۰ و ۹/۸۱ هستند و چگالی سیال و شتاب گرانش خوانده می‌شوند. این مسئله یک شبیه‌سازی ریاضی از پدیده اندرکنش دینامیکی سد صلب و مخزن در حالت یک‌بعدی با شتاب ثابت زلزله به‌شمار می‌رود و به عبارت دیگر یک آنالیز یک‌بعدی از پدیده نامبرده است.

حل تحلیلی معادله موج با شرایط مرزی و اولیه در حالت (الف) و (ب) و با استفاده از روش جداسازی متغیرها مطابق با رابطه (۴۲) به دست می‌آید:

$$\sum_{n>0} \left(\left(a_n \cos \left(\frac{(2n+1)\pi c}{L} t \right) \right) \sin \left(\frac{(2n+1)\pi x}{L} \right) \right) \quad (42)$$

که در رابطه (۴۲) برای a_n خواهیم داشت:

$$a_n = \frac{2 \int_0^L g_1(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx}{\int_0^L \sin^2 \frac{n\pi x}{L} dx} \quad (43)$$

و در رابطه (۴۳)، $g_1(x)$ برای حالت (الف) برابر است با:

$$g_1(x) = e^{-\frac{(x-0.5L)^2}{200}} \quad (44)$$

و برای حالت (ب) برابر است با:

$$g_1(x) = x\rho g \quad (45)$$

نتایج عددی روش‌های اختلاف محدود و چندربعی در مقایسه با حل دقیق برای حالت (الف) مثال سوم به ترتیب در [شکل‌های ۸](#) و [۹](#) نمایش داده شده است.

$$u(0, t) = 0, \quad u_x(L, t) = \alpha \omega^2 \sin(\omega t) \quad (46)$$

که در آن، α دامنه موج سینوسی و ω فرکانس بارگذاری است. همان‌طور که مشخص است، شرایط مرزی در این مثال به صورت نامتقارن در نظر گرفته شده است که شرط نیومن آن وابسته به زمان است. لازم به ذکر است که مقدار بهینه متغیر شکل برای روش چندربعی در حالت (ج) ۵۱ به دست آمده است.

پاسخ دقیق حالت (ج) با توجه به بخش چهارم نیز به شکل زیر تعیین می‌گردد:

$$u(x, t) = \sum_{n>0} \left(Z_n(t) \sin\left(\frac{(2n+1)\pi x}{L}\right) \right) \quad (47)$$

که در آن، $Z_n(t)$ به صورت رابطه (۴۸) تعریف می‌شود:

$$\begin{aligned} Z_n(t) = & -\left\{ L e^{-\frac{\pi t v (2n+1)i}{2L}} \right. \\ & [4L^2 b_n w^3 - 4L^2 b_n w^4 \\ & - 4L^2 b_n w^3 e^{\frac{\pi t v (2n+1)i}{L}} \\ & + 4L^2 b_n w^4 e^{\frac{\pi t v (2n+1)i}{L}} \\ & + b_n \pi^2 v^2 w^2 + 4b_n n^2 \pi^2 v^2 w^2 \\ & - 4b_n n^2 \pi^2 v^2 w^2 e^{\frac{\pi t v (2n+1)i}{L}} \\ & - 4b_n n \pi^2 v^2 w^2 e^{\frac{\pi t v (2n+1)i}{L}} \\ & + L b_n \pi v w^2 e^{\frac{\pi t v (2n+1)i}{2L}} \sin(tw) 4i \\ & \left. + L b_n \pi v w^2 e^{\frac{\pi t v (2n+1)i}{2L}} \sin(tw) 8i \right\} \\ & / \left(\begin{array}{l} (\pi v (2n+1)) \\ (-4L^2 w^2 + 4\pi^2 n^2 v^2 + 4\pi^2 n v^2) \\ + \pi^2 v^2 \end{array} \right) \end{aligned} \quad (48)$$

همچنین b_n در رابطه بالا برابر است با:

$$b_n = \frac{2 \int_0^L x \sin \frac{n\pi x}{L} dx}{L \int_0^L \sin^2 \frac{n\pi x}{L} dx} \quad (49)$$

نتایج عددی حالت (ج) در مقایسه با پاسخهای تحلیلی آن در زمان و مکان به ترتیب در شکل‌های ۱۲ و ۱۳ نمایش داده شده است. در مثال سوم شرایط مرزی سمت راست، یک تابع سینوسی وابسته به زمان است. در این مثال یک موج سینوسی به‌طور مداوم در انتهای دامنه تولید می‌شود و به درون دامنه انتقال می‌یابد. کاربرد این مثال را نیز

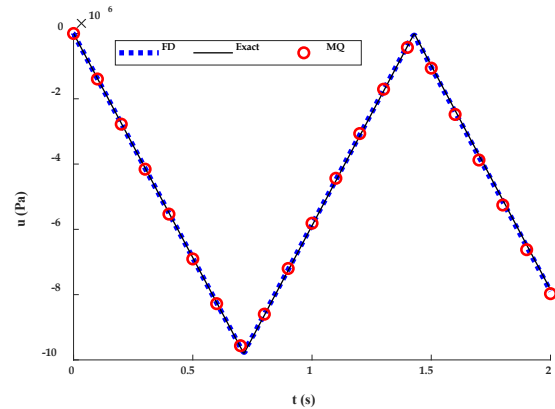


Fig. 10 Time history of hydrodynamic pressure at $x = 500$, Example 3-b

شکل ۱۰ تغییرات فشار هیدرودینامیک برحسب زمان در $x = 500$ ، در حالت (ب) از مثال شماره سه

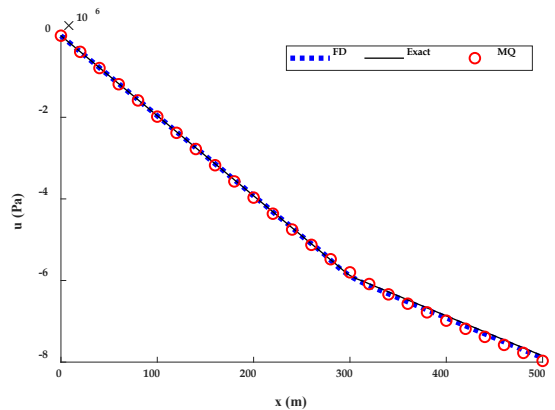


Fig. 11 Hydrodynamic pressure at the domain length at $t = 2$, Example 3-b

شکل ۱۱ فشار هیدرودینامیک در طول دامنه در زمان $t = 2$ ، در حالت (ب) از مثال شماره سه

نتایج این مثال یک موج با تغییرات خطی در زمان است که هر ۰/۶۶ ثانیه شیب آن معکوس می‌شود و هم‌زمان با برخورد به انتهای دامنه به داخل آن برمی‌گردد.

زمان پردازش روش بدون شبکه برای مثال‌های (الف) و (ب) به ترتیب ۰/۱۱ و ۰/۰۸ و برای نوع با شبکه به ترتیب ۰/۱۶ و ۰/۱ ثانیه مشاهده گردید.

ج: مسئله مقدار مرزی (اندرکنش دینامیکی سد صلب و مخزن یک‌بعدی تحت زلزله سینوسی)

شرایط اولیه مسئله در این حالت نیز مانند حالت قبل است ولی شرایط مرزی آن به صورت رابطه (۴۶) انتخاب می‌شود:

۵- نتیجه‌گیری

این پژوهش به اعتبارسنجی یک روش تحلیلی جدید برای حل معادله موج مرتبه دوم ناهمگن در هندسه یک‌بعدی، با تأکید بر شرایط مرزی نامتقارن، اختصاص یافته است. ماهیت هذلولی این معادله و شرایط مرزی نامتقارن، چالش‌های مهمی را برای روش‌های عددی؛ مانند کاهش دقت در نواحی با گرادیان‌های شدید، ایجاد می‌کند. از این رو، توسعه رویکردهای تحلیلی برای اجتناب از خطاهای ذاتی روش‌های عددی و فراهم آوردن معیاری جهت ارزیابی دقت آن‌ها ضروری است.

نوآوری اصلی پژوهش، ارائه یک پاسخ تحلیلی مبتنی بر روش جداسازی متغیرها برای معادله موج ناهمگن تحت شرایط مرزی خاص است. به منظور اعتبارسنجی، شرایط اولیه گوسی و مجموعه‌ای از شرایط مرزی متقارن و نامتقارن برای افزایش پیچیدگی مسئله انتخاب شدند.

همچنین به منظور سنجش اعتبار پاسخ تحلیلی پیشنهادی و تحلیل عددی مسائل تعریف‌شده، روش‌های بدون شبکه پایه شعاعی چندربعی و اختلاف محدود نیز به کار گرفته شدند. انطباق نتایج سه روش نشان داد که روش تحلیلی پیشنهادی از اعتبار کافی برخوردار است. از طرف دیگر مشاهده شد که متغیر شکل روش چندربعی مستقل از زمان است و این امر باعث افزایش سرعت این روش نسبت به روش اختلاف محدود شد. با وجود تعداد مراکز محاسباتی کمتر، روش چندربعی دقت بالاتری نسبت به روش اختلاف محدود از خود نشان داد که این امر به انتخاب بهینه متغیر شکل و ایجاد تابع پاسخ پیوسته در این روش نسبت داده می‌شود. روش‌های دقیق و عددی این پژوهش در تحلیل اندرکنش دینامیکی سد صلب و مخزن در حالت یک‌بعدی به کار می‌رود. توسعه این روش‌ها برای حالت دوبعدی، می‌تواند برای پژوهش‌های آتی با ارزش و جذاب باشد.

می‌توان در آنالیز اندرکنش دینامیکی سد صلب و مخزن در حالت یک‌بعدی با شتاب سینوسی زلزله نشان داد.

زمان پردازش روش بدون شبکه برای مثال (ج) برابر با ۰/۱۲ ثانیه و برای نوع باشبکه برابر با ۰/۱۴ ثانیه مشاهده گردید. مقدار خطای به دست آمده در [جدول ۱](#) نشان‌دهنده قابلیت خوب روش عددی بدون شبکه چندربعی در حل مسائل با شرایط مرزی نامتقارن است. همچنین با توجه به دقت بالاتر، این روش می‌تواند جایگزین مناسبی برای روش متداول اختلاف محدود نیز باشد.

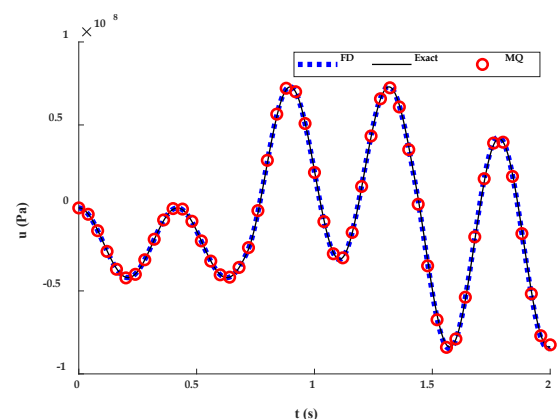


Fig. 12 Hydrodynamic pressure at the domain length at $x = 500$, Example 3-c

شکل ۱۲ تغییرات فشار هیدرودینامیک بر حسب زمان در $x = 500$ ، در حالت (ج) از مثال شماره سه

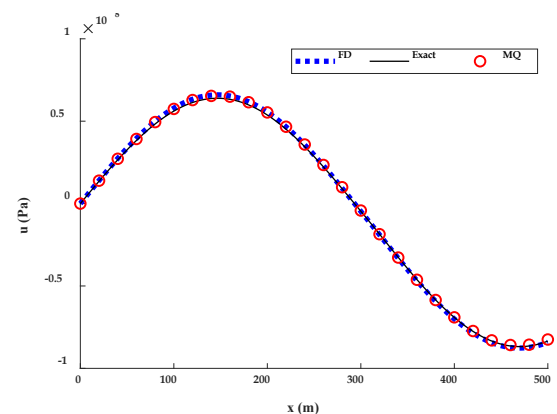


Fig. 13 Time history of hydrodynamic pressure at $t = 2$, Example 3-c

شکل ۱۳ فشار هیدرودینامیک در طول دامنه در زمان $t = 2$ ، در حالت (ج) از مثال شماره سه

6- List of symbols

c (m/s)	Speed of sound in fluid
x (m)	Position
t (s)	Time
u	Displacement or Hydrodynamics pressure
CFL	Courant-Friedrichs-Lewy
c_{sp}	Shape parameter
X	Eigenfunction
MQ	Multiquadric
FD	Finite Difference
$f(x, t)$	Wave source

Credit Authorship Contribution Statement

Conceptualization, E.J. and R.B.; methodology, R.B. and N.T.; software, N.T.; data analysis, N.T.; writing original draft preparation, N.T.; writing review and editing, E.J. and R.B.; supervision, E.J.; All authors have read and agreed to the published version of the manuscript.

Conflicts of Interest

The authors declare that there is no any conflict of interest.

Data Availability Statement

The data that support the findings of this study are available on request from the corresponding author.

Funding

No financial support was received from any organization for this research.

References

- Akbari M, Pirzadeh B (2022) Implementation of exactly well-balanced numerical schemes in the event of shockwaves: A 1D approach for the shallow water equations International Journal for Numerical Methods in Fluids 94:849-895 [doi:10.1002/flid.5076](https://doi.org/10.1002/flid.5076)
- Akbari M, Pirzadeh B (2023) A second order well-balanced and entropy consistent numerical scheme for one-dimensional shallow water equations Journal of Hydraulics-, [in persian]. [doi:10.30482/jhyd.2023.404790.1654](https://doi.org/10.30482/jhyd.2023.404790.1654)
- Al-Taweel A, Mu L (2021) A new upwind weak Galerkin finite element method for linear hyperbolic equations Journal of Computational and Applied Mathematics 390 [doi:10.1016/j.cam.2020.113376](https://doi.org/10.1016/j.cam.2020.113376)
- Ali I, Hanoglu U, Vertnik R, Šarler B (2024) Assessment of Local Radial Basis Function

- Collocation Method for Diffusion Problems Structured with Multiquadrics and Polyharmonic Splines Mathematical and Computational Applications 29 [doi:10.3390/mca29020023](https://doi.org/10.3390/mca29020023)
- Babae R, Jabbari E, Eskandari-Ghadi M, Khaji N (2022) A new algorithm for shape parameter optimization in the multiquadric method for bending beam and elastic plane BVPs Archive of Applied Mechanics 92:3109-3125 [doi:10.1007/s00419-022-02225-y](https://doi.org/10.1007/s00419-022-02225-y)
- Babae R, Jabbari, E., & Eskandari-Ghadi, M (2019) Application of Multiquadric Radial Basis Function method for Helmholtz equation in seismic wave analysis for reservoir of rigid dams Amirkabir Journal of Civil Engineering 52:3015-3030
- Bacar AH, Rawhoudine SC (2024) An Optimal Multiquadric Variable Shape Parameter for Boundary Value Problems Using Particle Swarm Optimization Journal of Mathematics Research 16 [doi:10.5539/jmr.v16n2p108](https://doi.org/10.5539/jmr.v16n2p108)
- Chen CS, Karageorghis A, Amuzu L (2021) Kansa RBF collocation method with auxiliary boundary centres for high order BVPs Journal of Computational and Applied Mathematics 398 [doi:10.1016/j.cam.2021.113680](https://doi.org/10.1016/j.cam.2021.113680)
- Cheniguel (2013) Numerical method for solving wave equation with non local boundary conditions". In Proceedings of the International MultiConference of Engineers and Computer Scientists
- Choudhury AH Wavelet Solution of Convection-Diffusion Equation with Neumann Boundary Conditions. In: Ansari AR (ed) Advances in Applied Mathematics, Cham, 2014// 2014. Springer International Publishing, pp 197-204
- Fallah A, Jabbari, E., & Babae, R. (2019) Development of the Kansa method for solving seepage problems using a new algorithm for the shape parameter optimization Computers & Mathematics with Applications 77:825-829, [in persian].
- Gao R, Hua K (2023) A numerical method for solving uncertain wave equation Chaos, Solitons & Fractals 175 [doi:10.1016/j.chaos.2023.113976](https://doi.org/10.1016/j.chaos.2023.113976)
- Geiser J (2008) Fourth-Order Splitting Methods for Time-Dependant Differential Equations Numerical Mathematics: Theory, Methods and Applications 1:321--339
- Gu J, Jung J-H (2020) Adaptive Radial Basis Function Methods for Initial Value Problems Journal of Scientific Computing 82 [doi:10.1007/s10915-020-01140-0](https://doi.org/10.1007/s10915-020-01140-0)
- Kansa EJ (1990) Multiquadrics—A scattered data approximation scheme with applications to computational fluid-dynamics—I surface approximations and partial derivative estimates

- Computers & Mathematics with Applications
19:127-145 [doi:10.1016/0898-1221\(90\)90270-t](https://doi.org/10.1016/0898-1221(90)90270-t)
- Kansa EJ, Geiser J (2013) Numerical solution to time-dependent 4D inviscid Burgers' equations Engineering Analysis with Boundary Elements 37:637-645
[doi:10.1016/j.enganabound.2013.01.003](https://doi.org/10.1016/j.enganabound.2013.01.003)
- Mastryukov AF (2024) A Difference Scheme for Wave Equation Numerical Analysis and Applications 17:58-66
[doi:10.1134/s1995423924010063](https://doi.org/10.1134/s1995423924010063)
- MohammadAlian S, Babae, R., & Jabbari, E. A new adaptive algorithm for the optimal distribution of computational centers in the meshless Multiquadric method Civil Infrastructure Researches, (Articles in Press), [in persian].
- Mossberg E (2008) Some numerical and analytical methods for equations of wave propagation and kinetic theory. Karlstads universitet
- Nourani VS, A., & Sadegh, B. (2018) Numerical solution of the wave equation using the wavelet collocation method, [in persian].
- Rizehvandi A, & Fahim, A. (2019) A numerical method for solving the one-dimensional wave equation considering non-local boundary conditions, [in persian].
- Samadi Rahim AY, M. Younesi, & H. Naderkhanlou, V. (2016) Evaluation of analytical and numerical solution of the wave equation in a time-varying field Conference on Tusi-Centric Engineering in Civil, Architectural, Electrical, and Mechanical Fields in Iran, [in persian].
- Shior MM et al. (2024) Numerical solution of partial differential equations using MATLAB: Applications to one-dimensional heat and wave equations Scientia Africana 23:243-254
[doi:10.4314/sa.v23i4.21](https://doi.org/10.4314/sa.v23i4.21)
- Shokri Kaveh H, & Adibi, H. (2020) Finite difference method for solving the two-dimensional wave equation, [in persian].
- Soleymani F, Zhu S (2021) RBF-FD solution for a financial partial-integro differential equation utilizing the generalized multiquadric function Computers & Mathematics with Applications 82:161-178 [doi:10.1016/j.camwa.2020.11.010](https://doi.org/10.1016/j.camwa.2020.11.010)
- Younes A, Delay F, Ackerer P (2024) A fully implicit edge/face centered discontinuous Galerkin / mixed finite element scheme for the advection-dispersion equation Advances in Water Resources 186
[doi:10.1016/j.advwatres.2024.104665](https://doi.org/10.1016/j.advwatres.2024.104665)