

# Investigating the bivariate joint distribution of flood characteristics in the Qarasu River catchment using elliptic and Archimedesian copula functions

Zeynab Alsadat Mousavi<sup>1</sup>, Mahmoud Reza Mollaeinia<sup>2\*</sup>, Seiyed Morteza Mohammadi<sup>3</sup>

<sup>1</sup>Masters Student, Department of Civil Engineering, Faculty of Engineering, University of Zabol, Zabol, Iran.  
<sup>2</sup>Associate Professor, Department of Civil Engineering, College of Engineering, University of Zabol, Zabol, Iran.  
<sup>3</sup>Assistant Professor, Department of Statistics, Faculty of Basic Sciences, Zabol University, Zabol, Iran.

Corresponding Author's E-mail: [m.mollaeinia@uoz.ac.ir](mailto:m.mollaeinia@uoz.ac.ir)

Received: 01 Nov. 2022  
Accepted: 02 Dec. 2022



Homepage: [ijwer.uoz.ac.ir](http://ijwer.uoz.ac.ir)

## Abstract

The catchment area of the Qarasu River is always exposed to floods. To prevent possible damages, factors affecting the occurrence of floods in this area should be investigated. In this research, the dependence between the two main flood variables of peak flow and volume was determined during a statistical period of 41 years using copula functions. The results showed that the most suitable marginal distributions for both variables are Log-normal and Weibull, respectively. Moreover, according to the goodness of fit tests, the normal copula function is the most capable function of depicting the structure of dependence between them. Finally, applying the selected copula illustrated that the joint return periods in the state {or} are less than those in the {and} and single variable state.

**Keywords:** Flood hydrograph, Bivariate analysis, Goodness of fit, Univariate return period, Joint return periods.

## Introduction

Flooding is a natural event that, if not managed properly, will pose a serious risk (Stedinger, 1993). Hydrological processes, including the flood phenomenon, are often multi-dimensional. The classic multidimensional models where the variables are dependent do not lead to precise results; the use of copula functions is recommended (Afsharypour et al., 2018; Chebana and Ouarda, 2011; Favre et al., 2004; Papaioannou et al., 2016; Salvadori and De Michele, 2004; Sklar, 1959; Sraj et al., 2015). Although copula functions were introduced by Sklar in 1959, Dirmichele and Salvadori (2003) used copula functions in hydrology to model the dependence between the two variables of rainfall intensity and duration. Salari et al. (2015) investigated the bivariate flood in the Karun River using copula functions. For this purpose, three flood variables, i.e., peak flow, volume, and continuity of the flood, were considered two by two (peak flow-volume, continuity-volume, and peak flow-continuation). The bivariate copula functions applied for studying the flood behavior at Danba station in China using Archimedesian copula functions and bivariate peak discharge and flood volume (Chen and Lin, 2016), the effect of flood on the dam overflow (Afsharypour et al., 2018).

The catchment area of the Qarasu River is always exposed to floods. This research applies a bivariate copula function considering the peak discharge and flood volume to investigate the flood behavior and return period of flood in the Qarasu catchment.

## Methodology

The catchment area of Qarasu River experiencing floods, located in the North-West of the Karkheh basin, Iran (Fig. 1), has experienced floods. We applied a bivariate Copula function, governing by Eq. (1), of peak flow and volume of flood measured at Doab-Merg to study the flood phenomenon in the catchment. We began with

determining the flood characteristics (peak discharge and volume) by drawing the flood hydrograph in Excel software, a schematic hydrograph illustrated in Fig. 2. Then, we qualified the most appropriate marginal distribution for both variables. It was followed by choosing the most suitable copula function according to the best correlation between peak discharge and flood volume variables. Correlation between the variables was obtained by Tau Kendall's correlation coefficient relationship, and the most suitable copula function was determined based on the Kramer von Mises test and the criteria of the logarithm of the likelihood function, root mean square error, and Akaike and Bayesian information, used Eqs (8)-(13). The detailed function parameter is also obtained from the maximum pseudo-likelihood method. All required codes were provided in R software. Finally, applying the qualified copula functions, the single variable and bivariate returns are calculated and compared with each other. Among the existing methods, the methods of joint return period in the {or} state and joint return period in the {and} state are selected to calculate the joint return period.

### Results and Discussion

Table 2 shows statistical characteristics of acquired flood data for the main characteristics of floods, peak flow, and volume in the catchment area of the Qarasu River. The best marginal distributions of peak flow and volume variables are log-normal and Weibel distributions, respectively, Table 3. Furthermore, the fitness analysis of Clayton, Gamble, Normal (Gaussi), Joe, Frank, and T copula functions using the Kramer von Mises test and the criteria of the logarithm of likelihood function, root mean square error, Akaike information and Bayesian (Table 4), lead to found that the normal copula function is the best copula function to show the dependence structure between peak discharge and flood volume variables. Applying the bivariate-normal copula function resulted in the joint return period in the {or} state being smaller than the joint return period in the {and} state and the single variable return period, Table 5. On the contrary, the joint return period in the {and} state is lower than the {or} state and the single variable return period, Table 5.

In general, if in a project, safety takes precedence over cost, it is better to design based on the joint return period in the {or} state, and if the cost takes precedence over safety, it is better to design based on the joint return period in the {and} state. Because in the {or} state, when one of the flood variables exceeds its threshold, it considers the flood dangerous and is ready to dream with more possibilities. But in the case of a flood, it is dangerous if both variables exceed their thresholds. These results have been confirmed in the past by other researchers, such as (Afsharypour, z., et al., 2018) and (Rahimi, L., et al. 2014).

Finally, by comparing the results obtained from the return period in univariate and bivariate modes, we can see that the univariate flood analysis is not an accurate and comprehensive analysis. For proper analysis, using bivariate and more will give us better results because flood is a multivariate phenomenon. It is next, and its variables affect each other. Therefore, using more variables for flood analysis in future research is suggested.

**Conclusion:** Comparing the results obtained from univariate and bivariate modes shows that the normal-bivariate flood analysis is crucially precise and describes the dependence between peak flow and volume flood variables, efficiently. Thus, it is suggested to use bivariate modes or more to simulate the correlation between flood variables. Moreover, the joint return period in the {or} state is smaller than that in the {and} state and the single variable return period, which is not convenient to design where safety is prioritized over cost in a project.

© 2022 University of Zabol, Zabol, Iran.



This is an open access article distributed under the terms and conditions of the Creative Commons Attribution 4.0 International (CC BY 4.0 license) (<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>)

# بررسی توزیع مشترک دومتغیره ویژگی‌های سیل در حوضه آبریز رودخانه قره‌سو با استفاده از تابع‌های مفصل بیضوی و ارشمیدسی

زینب‌السادات موسوی<sup>۱</sup>، محمودرضا ملائی‌نیا<sup>۲\*</sup>، سید مرتضی محمدی<sup>۳</sup>

<sup>۱</sup> دانشجوی کارشناسی ارشد، گروه مهندسی عمران، دانشکده فنی و مهندسی، دانشگاه زابل، زابل، ایران

<sup>۲</sup> دانشیار گروه مهندسی عمران، دانشکده فنی و مهندسی، دانشگاه زابل، زابل، ایران

<sup>۳</sup> استادیار گروه آمار، دانشکده علوم پایه، دانشگاه زابل، زابل، ایران

پست الکترونیکی نگارندهٔ مسئول: [m\\_mollaienia@uoz.ac.ir](mailto:m_mollaienia@uoz.ac.ir)

وبگاه نشریه: [ijwer.uoz.ac.ir](http://ijwer.uoz.ac.ir)



تاریخ دریافت: ۱۴۰۱/۰۸/۰۱

تاریخ پذیرش: ۱۴۰۱/۰۹/۰۲

**چکیده:** حوضه آبریز رودخانه قره‌سو (یکی از زیر حوضه‌های حوضه آبریز کرخه) در غرب کشور، همواره در معرض سیلاب قرار دارد، بنابراین، به‌منظور مدیریت سیلاب و جلوگیری از خسارت‌های احتمالی آن لازم است تا نقش عوامل مؤثر بر وقوع سیلاب در این منطقه بررسی شود. در این تحقیق، برای تعیین میزان وابستگی بین دو متغیر اصلی مؤثر بر پدیده سیلاب، یعنی دبی اوج و حجم، در یک دوره آماری ۴۱ ساله (سال‌های ۱۳۵۳ تا ۱۳۹۳) از تابع‌های مفصل دومتغیره استفاده شده است. پس از تعیین توزیع‌های لاگ-نرمال و وایبل به‌ترتیب به‌عنوان مناسب‌ترین توزیع‌های حاشیه‌ای دو متغیر دبی اوج و حجم، تابع‌های مفصل کلایتون، گامبل، نرمال (گوسی)، جو، فرانک و تی برای به‌دست آوردن بهترین الگوی ساختار وابستگی بین این دو متغیر برآزش داده شد. آزمون‌های نیکویی برآزش نشان داد که تابع مفصل نرمال از توان برآزش بیشتری برخوردار است. محاسبه دوره بازگشت توأم با استفاده از تابع مفصل نرمال نشان داد که دوره بازگشت دومتغیره در حالت {یا} از دوره بازگشت‌های دومتغیره در حالت {و} و تک‌متغیره مقدار کمتری دارد.

**کلیدواژگان:** هیدروگراف سیل، تحلیل دومتغیره، نیکویی برآزش، دوره بازگشت تک‌متغیره، دوره بازگشت توأم.

## ۱- مقدمه

ردی و گانگولی با استفاده از تابع‌های مفصل و سه متغیر دبی اوج، حجم و مدت‌زمان سیلاب، خطر سیلاب در حوضه رودخانه دلاور در پورت جرویس نیویورک، ایالات متحده را مورد ارزیابی قرار دادند (Reddy and Ganguli, 2013).

خو و همکاران با استفاده از تابع‌های مفصل اثر هم‌زمان بارش شدید باران و جزر و مد را بر وقوع سیلاب در منطقه ساحلی فوژو بررسی نمودند (Xu et al. 2014).

سالاری و همکاران سیلاب دومتغیره در رودخانه کارون را با استفاده از توابع مفصل بررسی نمودند. برای این کار سه متغیر مهم سیلاب یعنی دبی اوج، حجم و تداوم سیلاب را دوبه‌دو (دبی اوج-حجم، تداوم-حجم، و دبی اوج-تداوم) در نظر گرفتند (Salari et al., 2015).

در این پژوهش از تابع‌های مفصل برای بیان توزیع مشترک دو متغیر دبی اوج و حجم سیل و بیان رفتار سیلاب در رودخانه قره‌سو استفاده می‌شود. برای این منظور، تابع‌های مفصل بیضوی و ارشمیدسی به کار گرفته می‌شود.

## ۲- مواد و روش‌ها

## ۲-۱- منطقه مورد مطالعه

حوضه آبریز رودخانه قره‌سو با وسعت ۵۳۵۴ کیلومترمربع واقع در استان کرمانشاه و در شمال غربی حوزه آبریز کرخه، در محدوده طول‌های جغرافیایی ۴۶ درجه و ۲۲ دقیقه تا ۴۷ درجه و بین عرض‌های جغرافیایی ۳۴ درجه تا ۳۴ درجه و ۵۵ دقیقه قرار دارد.

برای تحلیل سیلاب، از داده‌های ایستگاه هیدرومتری دوآب-مرگ (شکل ۱) که در طول جغرافیای ۴۷ درجه و ۴۷ دقیقه و عرض جغرافیایی ۳۴ درجه و ۳۳ واقع است، استفاده شده است. این ایستگاه در سال ۱۳۵۳ تأسیس گردیده است، وسعتی برابر با ۱۲۶۰ کیلومترمربع را دربر می‌گیرد، و ارتفاع آن از سطح دریا ۱۲۹۰ متر است (Zeraati and Zounemat-Kermani, 2018).

سیلاب<sup>۱</sup> یک حادثه طبیعی است که اگر به‌درستی مدیریت نشود محیط‌زیست و انسان‌ها را با خطر جدی مواجه خواهد کرد (Stedinger, 1993). فرآیندهای هیدرولوژیکی همچون پدیده سیلاب اغلب چندبعدی هستند و بررسی آن‌ها به‌صورت یک‌بعدی و بدون در نظر گرفتن وابستگی بین متغیرها نتایج دقیقی در پی ندارد. به‌عنوان مثال، هنگام طراحی یک سازه کنترل سیل، لازم است تا اثر هم‌زمان دبی اوج<sup>۲</sup> و حجم<sup>۳</sup> سیلاب بر روی آن سازه در نظر گرفته شود.

مدل‌های چندمتغیره کلاسیک زمانی که متغیرهای یک پدیده به هم وابسته هستند، از توزیع حاشیه‌ای متفاوتی برخوردارند، و عملکرد مناسبی ندارند، ولی تابع‌های مفصل<sup>۴</sup> که اولین بار در سال ۱۹۵۹ توسط اسکالر معرفی گردیده است می‌توانند به‌خوبی انواع وابستگی‌هایی که بین متغیرهای هیدرولوژی وجود دارد را بیان کنند. علاوه بر این توابع مفصل قادر به تعریف دوره بازگشت اولیه و ثانویه هستند و محاسبات مربوط به دوره بازگشت را نیز ساده‌تر می‌سازند (Afsharypour et al., 2018; Chebana and Ouarda 2011; Favre et al., 2004; Papaioannou et al., 2016; Salvadori and De Michele, 2004; Sklar, 1959; Sraj et al., 2015).

نخستین بار در سال ۲۰۰۳ دی‌میچل و سالوادوری از تابع‌های مفصل در هیدرولوژی برای مدل‌سازی وابستگی بین دو متغیر شدت و مدت بارش استفاده نمودند (Salvadori and De Michele, 2003). بعد از آن تابع‌های مفصل در دیگر شاخه‌های هیدرولوژی مانند خشک‌سالی و سیلاب نیز بکار گرفته شد (Shiau 2006, Omidi et al. 2010, Rocha Júnior, et al. 2020, Poonia et al. 2021).

از مفصل‌های مختلفی برای تحلیل پدیده سیلاب براساس دو متغیر دبی اوج و حجم سیلاب استفاده شده است (Chowdhary et al. 2011; Reddy and Ganguli, 2012; Li et al. 2013; Chen and Lin, 2016; Afsharypour et al., 2018).

<sup>4</sup> Copula functions

<sup>1</sup> Flood

<sup>2</sup> Peak Flow

<sup>3</sup> Volume

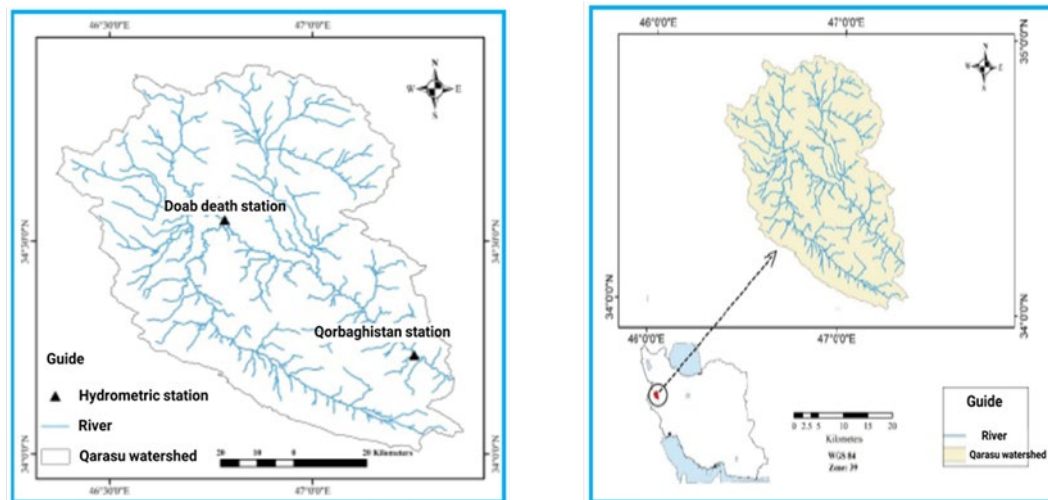


Fig. 1 The location of Doab Merg station on the Qarasu River in Kermanshah province (Khosravi Fard et al., 2017).  
 شکل ۱ موقعیت ایستگاه دوآب مرگ روی رودخانه قره‌سو واقع در استان کرمانشاه (خسروی‌فرد و همکاران، ۲۰۱۷).

روزانه کم می‌گردد. برای تعیین دبی پایه می‌توان نقطه شروع سیلاب، جایی که هیدروگراف افزایش ناگهانی به سمت بالا دارد، را (افزایش دبی از جریان پایه) به نقطه پایان سیلاب، جایی که هیدروگراف روند نزولی به خود می‌گیرد و به حالت مسطح درمی‌آید، با یک خط مستقیم به هم متصل کرد

شروع و پایان رواناب سال  $\Delta m$  و  $Q_{ij}^b$  مقدار جریان پایه روز زام در سال زام است.

### ۳-۲- انتخاب بهترین توزیع حاشیه‌ای برای

#### مشخصه‌های سیلاب

گام نخست در تحلیل دومتغیره پدیده سیلاب تعیین توزیع-های حاشیه‌ای دومت غیر دبی اوج و حجم سیلاب است. در این پژوهش برای تخمین پارامترهای توزیع‌های آماری و انجام آزمون نیکویی برازش<sup>۵</sup> به‌منظور دستیابی به بهترین تابع توزیع حاشیه‌ای از نرم‌افزار ایزی‌فیت<sup>۶</sup> که بر مبنای روش تخمین حداکثر درست‌نمایی (MLE) است، استفاده شد. آزمون نیکویی برازش براساس آزمون‌های عددی (کلموگروف-اسمیرنوف<sup>۷</sup>، اندرسون-دارلینگ<sup>۸</sup> و کای-اسکوئر<sup>۹</sup>) انجام شد. بر این اساس هر توزیعی که آماره

### ۲-۲- تعیین مشخصه‌های سیل

برای تعیین مشخصه‌های سیل (دبی اوج و حجم) ابتدا هیدروگراف سیل که تغییرات دبی نسبت به زمان را نشان می‌دهد رسم می‌شود (شکل ۲). سپس، میزان دبی پایه (جریانی که از قبل در رودخانه وجود داشته است) از دبی

به‌طور کلی، مشخصه‌های دبی اوج و حجم سیلاب به‌ترتیب از رابطه‌های (۱) و (۲) تعیین می‌شوند (Karmakar and Simonovic, 2008; Yue et al., 1999).

$$P_i = \max \left[ \left( Q_{ij} - Q_{ij}^b \right) \right] \quad (1)$$

$$, j = ED_i, 1 + ED_i, 2 + ED_i, \dots, SD_i$$

$$V_i = \left( V_i^{Total} - V_i^{Base} \right)$$

$$= \left\{ \sum_{j=SD_i}^{ED_i} \left[ Q_{ij} - \frac{1}{2} (Q_{is} + Q_{ie}) \right] \right\} - \frac{1}{2} D_i (Q_{is} + Q_{ie}) \quad (2)$$

$$= \sum_{j=SD_i}^{ED_i} Q_{ij} - \frac{1}{2} (Q_{is} + Q_{ie}) (1 + D_i)$$

در این رابطه‌ها  $Q_{ij}$  جریان مشاهده‌شده روز زام در سال  $\Delta m$  و  $Q_{ie}$  و  $Q_{is}$  به‌ترتیب جریان‌های روزانه مشاهداتی در تاریخ

<sup>8</sup> Anderson Darling

<sup>9</sup> Chi-Squared

<sup>5</sup> Goodness of Fit Test

<sup>6</sup> EasyFit

<sup>7</sup> Kolmogorov Smirnov

متغیرهای وابسته، تابع مفصل معرفی نمود (Sklar 1959). اگر  $X$  و  $Y$  متغیرهای تصادفی به ترتیب با تابع‌های توزیع حاشیه‌ای  $F_X(X)$  و  $F_Y(Y)$  و تابع توزیع توأم  $F_{X,Y}$  باشند، آنگاه تابع مفصل  $C$  وجود دارد به گونه‌ای که:

$$F_{XY}(x,y) = C(F_X(X), F_Y(Y)), \quad x, y \in R \quad (4)$$

$$F_{XY}(x,y) = C(F_X(X), F_Y(Y)), \quad x, y \in R$$

در صورت پیوسته بودن دو تابع  $F_X(x)$  و  $F_Y(y)$ ، تابع  $C$  منحصر به فرد است. با فرض پیوسته بودن دو متغیر تصادفی  $X$  و  $Y$ ؛ و  $u = F_X(x)$  و  $v = F_Y(y)$ ، تابع چگالی مفصل از رابطه (5) محاسبه می‌شود.

$$c(u,v) = \frac{\partial^2 c(u,v)}{\partial u \partial v} \quad (5)$$

همچنین، تابع چگالی احتمال توأم بر حسب تابع چگالی مفصل به صورت رابطه (6) قابل محاسبه است:

$$f_{X,Y}(X,Y) = c(f_X(x), f_Y(y)) f_X(x) f_Y(y), \quad x, y \in R \quad (6)$$

که در آن  $f_X(x)$  و  $f_Y(y)$  به ترتیب تابع‌های چگالی حاشیه‌ای متغیرهای تصادفی  $X$  و  $Y$  هستند (Joe, 2014).

با توجه به ساختار وابستگی بین متغیرها، خانواده-مفصل‌های مختلفی توسط پژوهشگران معرفی شده است. مهم‌ترین این خانواده‌ها در تحلیل داده‌های هیدرولوژی، خانواده مفصل‌های بیضوی و خانواده مفصل‌های ارشمیدی است.

خانواده مفصل‌های بیضوی (شامل: گوسی و تی) به کمک روش معکوس و با استفاده از توزیع‌های بیضوی به وجود می‌آیند، و قادرند همبستگی بین توزیع‌های حاشیه‌ای را به خوبی نمایش دهند.

♦ مفصل گوسی (نرمال):

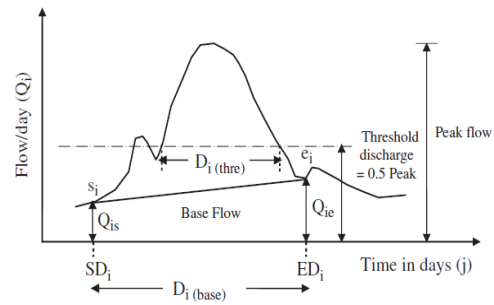


Fig. 2 Characteristics of ith flood event. (Karmakar and Simonovic 2008).

شکل ۲ ویژگی‌های رویداد سیل (کارماکار و سیمونوویچ، ۲۰۰۸).

کمتری داشته و پی-ارزش  $10^{-P}$  آن بزرگ‌تر از 0.05 باشد برای برآزش داده‌های مورد نظر مناسب‌تر است (Afsharypour et al., 2018). برای واسنجی نتایج به دست آمده از نرم‌افزار ایزی‌فیت و انتخاب بهترین توزیع حاشیه‌ای و پارامترهای آن کد لازم در نرم‌افزار R نگاشته شد.

## ۲-۴- بررسی همبستگی بین متغیرها

برای انتخاب بهترین تابع مفصل ابتدا وابستگی بین متغیرها محاسبه می‌شود. برای محاسبه وابستگی اولیه بین متغیرها ضرایب مختلفی وجود دارد، که در این پژوهش برای تعیین وابستگی اولیه بین دو متغیر دبی اوج و حجم سیل از ضریب همبستگی تاوکندال (رابطه (۳)) که یک معیار ناپارامتریک و براساس رتبه است، استفاده شد.

$$\tau_n = \left( \frac{n}{2} \right)^{-1} \sum \text{sign}[(x_i - x_j)(y_i - y_j)] \quad (3)$$

$i, j = 1, 2, \dots, n.$

در رابطه فوق  $\text{sign}=1$  اگر  $[(x_i - x_j)(y_i - y_j)] > 0$  و  $\text{sign}=-1$  است اگر  $[(x_i - x_j)(y_i - y_j)] < 0$  باشد (Karmakar and Simonovic, 2009).

## ۲-۵- معرفی تابع مفصل

اسکلار در سال ۱۹۵۹، برای ایجاد توزیع‌های توأم بین

<sup>10</sup> P-Value

## ۲-۶- تخمین پارامتر تابع مفصل

روش‌های مختلفی برای برآورد پارامتر تابع مفصل ( $\theta$ ) ارائه شده است. از آن میان، روش برآورد حداکثر شبه‌درست‌نمایی ( $^{11}$ MPL) معکوس تاو-کندال، و معکوس رنو اسپیرمن پرکتبردر هستند. از آنجایی که این روش‌ها مبتنی بر رتبه می‌باشند پارامترها را مستقل از توزیع‌های حاشیه‌ای تخمین می‌زنند. در این پژوهش به منظور پارامتر تابع مفصل روش حداکثر شبه‌درست‌نمایی که مانند روش حداکثر درست‌نمایی است و فقط در آن به جای توزیع حاشیه‌ای پارامتری از توزیع حاشیه‌ای تجربی استفاده می‌شود (Requena, Mediero et al., 2013)، به کار گرفته شد.

## ۲-۱- انتخاب مناسب‌ترین تابع مفصل

برای انتخاب مناسب‌ترین تابع مفصل باید از آزمون نیکویی برازش استفاده کرد. برای این کار ابزارهای گرافیکی و آزمون‌های عددی وجود دارد که از میان آن‌ها آزمون کرامر و فون مایزس<sup>۱۲</sup> ( $S_n$ ) که مطابق مفصل‌های تجربی است مناسب‌تر است. این روش به صورت رابطه (۹) تعریف می‌شود:

جدول ۱ معرفی مفصل‌های ارشمیدسی (Joe, 2014).

Table 1 Introduction of Archimedean Copulas (Joe, 2014).

Copula	generator	'arameter Space $\theta$	$C_{\theta}(u,v)$
Frank	$-\log\left(\frac{\exp(-\theta t)-1}{\exp(-\theta)-1}\right)$	$(-\infty, +\infty) \setminus \{0\}$	$-\frac{1}{\theta} \ln\left[1 + \frac{(e^{-\theta u}-1)(e^{-\theta v}-1)}{e^{-\theta}-1}\right]$
Clayton	$\frac{1}{\theta}(t^{-\theta}-1)$	$[-1, +\infty) \setminus \{0\}$	$[\max(u^{-\theta} + v^{-\theta} - 1)]^{\frac{1}{\theta}}$
Gumbel	$(-\log t)^{\theta}$	$[1, +\infty)$	$\exp\left\{-\left[(-\ln u)^{\theta} + (\ln v)^{\theta}\right]^{\frac{1}{\theta}}\right\}$
Joe	$-\log(1-(1-t)^{\theta})$	$[1, +\infty)$	$1 - \left[(1-u)^{\theta} + (1-v)^{\theta} - (1-u)^{\theta}(1-v)^{\theta}\right]^{\frac{1}{\theta}}$

$$C^{Gu}(u, v, \rho) = \phi_{\rho}(\phi^{-1}(u), \phi^{-1}(v)) \quad (7)$$

$$\rho \in [-1, +1]$$

که در آن  $\phi_{\rho}$  تابع توزیع نرمال استاندارد دومتغیره با ضریب همبستگی  $\rho$  و  $\phi^{-1}$  معکوس تابع توزیع نرمال استاندارد است. ♦ مفصل تی (تی-استوندت):

$$C(u, v, \rho, \nu) = t_{\rho, \nu}(t_v^{-1}(u), t_v^{-1}(v)) \quad (8)$$

$$\rho \in [-1, +1]$$

که در آن  $\nu > 0$  و  $t_{\rho, \nu}$  تابع توزیع تی استاندارد دومتغیره با پارامتر همبستگی  $\rho$  و  $\nu$  درجه آزادی و  $t_v^{-1}$  معکوس تابع توزیع تی استاندارد با درجه آزادی  $\nu$  است (Chen and Guo, 2019).

خانواده مفصل‌های ارشمیدسی مفصل‌های کلیتون، گامبل، فرانک، و جو را دربر می‌گیرد. حالت دومتغیره این مفصل‌ها و فضای پارامتریک مربوط به آن‌ها در جدول ۱ ارائه شده است.

<sup>12</sup> Cramér-von Mises criterion

<sup>11</sup> Maximum pseudo-likelihood

$$RMSE = \sqrt{MSE} \quad (13)$$

$$= \sqrt{\frac{1}{N-K} \sum_{i=1}^N [x_c(i) - x_0(i)]^2}$$

که در آن  $x_c(i)$  و  $x_0(i)$  به ترتیب مقادیر محاسبه و مشاهده شده نام هستند،  $k$  تعداد پارامترهای استفاده شده در برآورد مقادیر محاسباتی و  $N$  تعداد مشاهدات است. در این معیار هر تابع مفصلی که مقدار ریشه میانگین مربعات خطای آن کمتر باشد برازش بهتری بر روی داده‌های موردنظر دارد (Akaike, 1974; Salari et al., 2015).

برای محاسبه حداکثر لگاریتم تابع درست‌نمایی از رابطه (۱۴) می‌توان بهره برد.

$$L(\theta) = \sum_{i=1}^n \log [c_{\theta}(F_X(x_i), F_Y(y_i))] \quad (14)$$

که در آن  $c_{\theta}$  چگالی تابع مفصل و  $F_X(x_i)$  و  $F_Y(y_i)$  تابع‌های توزیع تجمعی حاشیه‌ای هستند. در این معیار هر تابع مفصلی که مقدار حداکثر لگاریتم تابع درست‌نمایی آن بیشتر باشد برازش بهتری بر روی داده‌های موردنظر دارد (Zhang and Singh, 2012).

## ۲-۲- دوره بازگشت تک‌متغیره و دومتغیره

برای محاسبه دوره بازگشت تک‌متغیره (احتمال روی‌دادن یک پدیده) دبی اوج و حجم سیل به ترتیب از رابطه‌های (۱۵) و (۱۶) استفاده می‌شود، که در آن‌ها  $T_p$ ،  $F(p)$ ،  $T_V$  و  $G(v)$  به ترتیب دوره بازگشت تک‌متغیره و تابع توزیع تجمعی حاشیه‌ای متغیرهای دبی اوج و حجم سیل می‌باشند.

تابع توزیع تجمعی نیز برابر است با مقدار احتمال اینکه یک متغیر تصادفی مانند  $P$  کوچک‌تر یا مساوی یک مقدار ممکن  $p$  باشد (رابطه (۱۷)).

$$T_p = \frac{1}{1-F(p)} \quad (15)$$

$$S_n = \sum_{i=1}^n \left\{ C_n \left( \frac{R_i}{n+1}, \frac{S_i}{n+1} \right) - C_{\theta_n} \left( \frac{R_i}{n+1}, \frac{S_i}{n+1} \right) \right\}^2 \quad (9)$$

که در آن  $R_i$  رتبه  $x_i$  در میان  $(x_1, \dots, x_n)$ ،  $S_i$  رتبه  $y_i$  در میان  $(y_1, \dots, y_n)$  و  $C_n$  مفصل تجربی (ناپارامتریک و براساس رتبه) است و از رابطه (۱۰) به دست می‌آید:

$$C_n(u, v) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n 1 \left( \frac{R_i}{n+1} \leq u, \frac{S_i}{n+1} \leq v \right) \quad (10)$$

$$u, v \in [0, 1]$$

در کنار  $S_n$  لازم است که ما پی مقدار را نیز داشته باشیم. در نهایت تابع مفصلی انتخاب می‌شود که ضمن داشتن کمترین مقدار  $S_n$ ، پی مقدار آن نیز بزرگ‌تر از  $0.1$  باشد (Afsharypour et al., 2018).

علاوه بر این از معیارهای اطلاعات آکائیکه (AIC)<sup>۱</sup>، بیزی (BIC)<sup>۲</sup>، ریشه میانگین مربعات خطا (RMSE)<sup>۳</sup> و لگاریتم تابع درست‌نمایی (loglik)<sup>۴</sup> استفاده شد. معیارهای اطلاعات آکائیکه، بیزی که از دو بخش (۱) بخشی که عدم برازش را در نظر می‌گیرد؛ و (۲) بخشی که عدم اطمینان ناشی از تعداد پارامترهای مدل را در نظر می‌گیرد تشکیل شده‌اند، به ترتیب از رابطه‌های (۱۱) و (۱۲) به دست می‌آیند.

هرچقدر که مقدار این دو معیار کمتر باشد نشانه برازش بیشتر تابع مفصل بر داده‌های موردنظر است.

$$AIC = N \log(MSE) + 2(P) \quad (11)$$

$$BIC = N \log(MSE) + (P) \times \log(N) \quad (12)$$

در این رابطه‌ها  $N$  تعداد مشاهدات،  $MSE$  میانگین مربعات خطا و  $P$  تعداد پارامترهای برازش داده شده است.

میانگین مربعات خطا و ریشه میانگین مربعات خطا از رابطه (۱۳) محاسبه می‌شود.

<sup>3</sup> Root Mean Square Error

<sup>4</sup> Logarithm likelihood estimation

<sup>1</sup> Akaike information criterion

<sup>2</sup> Bayesian information criterion

$$T_{P,V}^v \leq \min [T_P, T_V] \leq \max [T_P, T_V] \leq T_{P,V}^A \quad (20)$$

که در آن  $T_P$  و  $T_V$  دوره بازگشت‌های تک‌متغیره می‌باشند (Requena et al., 2013).

### ۳- نتایج و بحث

در این بخش، توزیع مشترک دو متغیره ویژگی‌های سیل براساس دو متغیر دبی اوج و حجم سیلاب تعیین می‌شود. همه مراحل تحلیل فراوانی با استفاده از کدنویسی در محیط نرم‌افزار آماری R انجام می‌گردد.

#### ۳-۱- تعیین مشخصه‌های سیل

برای استخراج توزیع دو مشخصه سیلاب یعنی دبی اوج و حجم سیل از داده‌های ۴۱ ساله (سال‌های ۱۳۵۳ تا ۱۳۹۳) دبی روزانه ثبت‌شده در ایستگاه دوآب-مرگ استفاده شد. سپس با رسم هیدروگراف‌های سیل سالانه به کمک نرم‌افزار اکسل و روابط بیان‌شده در بخش ۲-۲ مقادیر دبی اوج و حجم سیل تعیین شد. خلاصه مشخصات آماری متغیرهای سیلاب در جدول ۲ ارائه شده است.

#### ۳-۲- انتخاب مناسب‌ترین توزیع احتمالاتی

متغیرهای دبی اوج و حجم سیل را در نرم‌افزار ایزی‌فیت با ۶۵ تابع توزیع احتمالاتی برارزش داده شد و براساس آزمون‌های کلموگوروف-اسمیرنوف، آندرسون-دارلینگ و کای-اسکوئر تابع توزیع‌های احتمال دارای بهترین همبستگی برای این دو متغیر انتخاب شدند. نتایج حاصل از این آزمون‌ها در جدول ۳ ارائه شده است. مطابق آزمون کولموگوروف-اسمیرنوف، چون پی-مقدار برابر ۰.۸۶۸۲ و از ۰.۰۵ بزرگ‌تر است، توزیع لاگ-نرمال با پارامترهای مکان ۳.۲۷۵ و مقیاس ۰.۹۲۳ برای برازش متغیر دبی اوج مناسب است. برای متغیر حجم سیلاب چون پی مقدار برابر با ۰.۸۸۰۹ و بزرگ‌تر از ۰/۰۵ است پس توزیع وایبل با پارامترهای مقیاس ۱.۲۶۶ و شکل ۱۱۳۵.۱۸۶ برای برازش متغیر حجم سیلاب مناسب است.

$$T_V = \frac{1}{1-G(v)} \quad (16)$$

$$F(p) = P[P \leq p] \quad (17)$$

برای محاسبه دوره بازگشت دو متغیره (توأم) با استفاده از تابع‌های مفصل روش‌های مختلفی وجود دارد که از جمله آن‌ها می‌توان به:

۱. دوره بازگشت در حالت {یا}

۲. دوره بازگشت در حالت {و}

۳. دوره بازگشت ثانویه

۴. دوره بازگشت شرطی، اشاره کرد (Salvadori et al., 2007).

در این پژوهش برای محاسبه دوره بازگشت توأم دو متغیر دبی اوج و حجم سیل، از دوره بازگشت در دو حالت {یا} که در آن، یکی از متغیرهای  $P$  و  $V$  از حد آستانه  $p$  و  $v$  بیشتر و {و} که در آن هر دو متغیر تصادفی  $P$  و  $V$  از حد آستانه  $p$  و  $v$  بیشتر است، استفاده شده است (رابطه‌های (۱۸) و (۱۹)).

$$T_{P,V}^v = \frac{\mu}{P(P > p \cup V > v)} \quad (18)$$

$$= \frac{\mu}{1 - C(F(p), G(v))}$$

$$T_{P,V}^A = \frac{\mu}{P(P > p \cap V > v)} \quad (19)$$

$$= \frac{\mu}{1 - F(p) - G(v) + C(F(p), G(v))}$$

که در آن‌ها  $F(p)$  و  $G(v)$  مقادیر تابع‌های توزیع تجمعی حاشیه‌ای دو متغیر دبی اوج و حجم سیل،  $C$  مفصل منتخب است به نحوی که

$$C(F(p), G(v)) = P(P \leq p \cap V \leq v)$$

فاصله زمانی بین دو رخداد متوالی است و برای رخدادهای حداکثر سالانه برابر یک لحاظ می‌شود و رابطه (۲۰) نیز همواره صادق است.

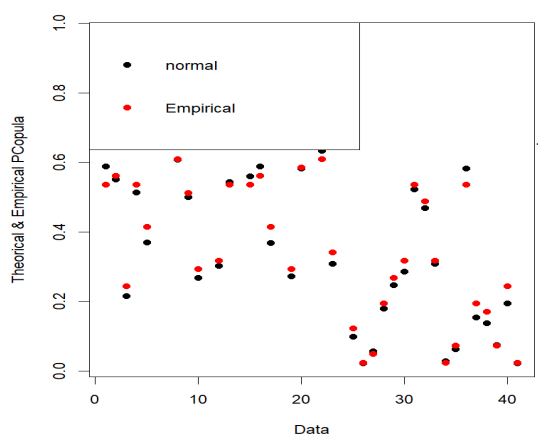


Fig. 3 The closeness of the normal copula function to the experimental copula function.

شکل ۳ نزدیک بودن تابع مفصل نرمال به تابع مفصل تجربی

جدول ۲ مشخصات آماری داده‌ها

Table 2 of statistical characteristics of the data

Statistical features	Number of data	Volume (Mm <sup>3</sup> )	peak flow (m <sup>3</sup> /s)
Average	41	1035.96	38.92
Minimum	41	59.46	3.62
Maximum	41	3124.12	123.92

جدول ۳ نتایج حاصل از آزمون نیکویی برازش توابع توزیع حاشیه‌ای.

Table 3 The results of the goodness of fit test of marginal distribution functions.

Variable	Probability distribution	parameters	Kolmogorov-Smirnov	Cramer-von Mises	Anderson-Darling	p-value
Peak flow	Log-normal	$\mu=3.275$ $s=0.923$	0.0895	0.0429	0.3083	0.8682
Volume	Weibull	$a=1.25947$ $\beta=1111.64937$	0.0978	0.0655	0.4155	0.8809

از این توسط توزیع‌های حاشیه‌ای تجربی و پکیج  $gofCopula$  در نرم‌افزار آر به دست آمده بود. نتایج حاصل از آزمون کرامر-فون-مایزس و معیارهای شاخص نیکویی برازش، لگاریتم تابع درست‌نمایی، ریشه میانگین مربعات خطا و اطلاعات آکائیکه و بیزی در جدول ۴ ارائه شده است. شکل ۳ نیز مبین مناسب بودن تابع مفصل نرمال، به دلیل نزدیکی به تابع مفصل تجربی، است.

### ۱-۳- تعیین دوره بازگشت

به‌طور کلی، دوره بازگشت بیان می‌کند که احتمال روی دادن سیل در یک مدت زمان معین چقدر است. به عبارتی دیگر، به میانگین دوره زمان تکرار پدیده سیل در یک دوره زمانی گفته می‌شود و برای تحلیل خطر رخداد سیل مورد استفاده قرار می‌گیرد. سیل با دوره بازگشت بزرگتر از دبی

### ۱-۳- همبستگی بین متغیرها

بر اساس ضریب همبستگی تاو-کندال، همبستگی بین دو متغیر دبی اوج و حجم سیل برابر با ۰.۶۵۱۲ است که مبین یک همبستگی مثبت و قوی است، چراکه پی-مقدار آن برابر با ۱۱-۵.۲۳۱e و کمتر از ۰.۰۵ شده است.

### ۲-۳- انتخاب مناسب‌ترین تابع مفصل

با مقایسه نتایج به دست آمده از آزمون کرامر-فون-مایزس و معیارهای لگاریتم تابع درست‌نمایی، ریشه میانگین مربعات خطا و اطلاعات آکائیکه و بیزی می‌توان دریافت که مفصل نرمال (گوسی) برازش بهتری روی داده‌ها دارد و ساختار وابستگی بین دو متغیر دبی اوج و حجم سیل را بهتر نشان می‌دهد، پس از سایر مفصل‌ها مناسب‌تر است، این امر، پیش

جدول ۴ نتایج آزمون کرامر فون مایزس و معیارهای لگاریتم تابع درست‌نمایی، اطلاعات آکائیکه و بی‌زی.

Table 4 Kramer von Mises test results and logarithm criteria of the likelihood function, Akaike and Bayesian information

Copula	Parameter	Cramer-von Mises test		Goodness of fit	loglik	AIC	BIC	RMSE
		Test statistics	p-value					
Clayton	2.7636	0.0416	0.1254	Ok	22.3305	-42.6611	-40.9476	<b>0.0318</b>
Gumbel	2.7962	0.0391	0.0424	Ok	24.2583	-46.5166	-44.8031	<b>0.0308</b>
Normal	0.8674	0.0272	0.1294	Ok	25.9815	-49.9631	-48.2496	<b>0.0257</b>
Joe	3.2843	0.0881	0.0014	No	19.4410	-36.8820	-35.1685	<b>0.0463</b>
Frank	9.6175	0.0310	0.0704	Ok	24.4248	-46.8497	-45.1361	<b>0.0274</b>
t	0.8229	0.0367	0.0634	Ok	26.0541	-48.1082	-44.6810	<b>0.0258</b>

جدول ۱ مقادیر دوره بازگشت‌های مختلف و دبی اوج و حجم مربوط به آن‌ها.

Table 5 values of different return periods and their corresponding peak flow and volume.

T=TP=TV	V(Mm3)	P(m3/s)	$T_{P,V}^V$	$T_{P,V}^A$
2	849.9546	26.4474	1.7156	<b>2.3976</b>
5	1652.8771	57.5157	3.8808	<b>7.0279</b>
10	2193.0253	86.3197	7.3648	<b>15.5718</b>
20	2699.4530	120.7150	14.1293	<b>34.2170</b>
100	3790.6425	226.4544	65.7521	<b>208.7089</b>
200	4234.3670	285.1029	128.3992	<b>452.1265</b>
500	4802.6738	376.8863	312.4076	<b>1251.4860</b>
1000	5220.8400	458.3868	613.7841	<b>2697.1490</b>

بیشتری دارد.

به‌طور کلی براساس دوره بازگشت در حالت {یا}، هرگاه یکی از متغیرهای سیل از حد آستانه خود فراتر رود آن سیل را خطرناک تلقی می‌کند و این موضوع سبب زیاد شدن مقدار احتمال و کم شدن دوره بازگشت آن‌ها نسبت به دوره بازگشت تک‌متغیره وقایع می‌شود. در صورتی که دوره بازگشت در حالت {و} فقط سیلی را خطرناک تلقی می‌کند که هر دو متغیر آن فراتر از حد آستانه خود باشند. به همین دلیل مقدار احتمال آن کم و دوره بازگشت آن از حالت تک‌متغیره بیشتر است. به همین منظور در پروژه‌هایی که مسائل اقتصادی مطرح است از دوره بازگشت توأم در حالت {و} استفاده می‌کنند. این نتایج در گذشته نیز توسط پژوهشگران دیگری نظیر (Afsharypour et al., 2018) و (Rahimi et al., 2014) نیز تأیید شده است.

جریان بزرگتری برخوردار است و در نتیجه، می‌تواند آسیب بیشتری بر زیربنایها و مردم وارد سازد؛ بنابراین، برای کنترل آن به سازه‌های هیدرولیکی با ابعاد بزرگتر نیاز است.

محاسبه دوره بازگشت دو متغیره در دو حالت {یا} و {و}، ابتدا با استفاده از رابطه دوره بازگشت تک‌متغیره مقادیر چندک مربوط به دوره بازگشت‌های ۲، ۵، ۱۰، ۲۰، ۱۰۰، ۲۰۰، ۵۰۰ و ۱۰۰۰ تعیین و به‌عنوان حدود آستانه هر یک از متغیرهای دبی اوج و حجم سیل لحاظ شدند. مقادیر دوره بازگشت‌های تک‌متغیره و دو متغیره و چندک مربوط به آن‌ها در جدول ۵ ارائه شده است. نتایج نشان می‌دهد که دوره بازگشت دو متغیره در حالت {یا} از دوره بازگشت دو متغیره در حالت {و} و دوره بازگشت تک‌متغیره مقدار کمتری دارد و برعکس آن دوره بازگشت دو متغیره در حالت {و} از حالت {یا} و دوره بازگشت تک‌متغیره مقدار

#### ۴- نتیجه‌گیری

در این پژوهش از روش تابع‌های مفصل برای تحلیل دومتغیره پدیده سیلاب در حوضه آبریز رودخانه قره‌سو استفاده شد. پس از تعیین مشخصه‌های اصلی سیلاب توزیع‌های لاگ-نرمال و وایبل به ترتیب به عنوان توزیع‌های حاشیه‌ای دومتغیره دبی اوج و حجم انتخاب شد. سپس تابع‌های مفصل کلایتون، گامبل، نرمال (گوسی)، جو، فرانک و تی برای نمایش ساختار وابستگی بین این دو متغیر برازش داده شد. با استفاده از آزمون کرامر-فون-مایزس و معیارهای لگاریتم تابع درست‌نمایی، ریشه میانگین مربعات خطا، اطلاعات آکائیکه و بیزی مشخص گردید که تابع مفصل نرمال برازش بهتری را نسبت به بقیه تابع‌های مفصل جهت نمایش ساختار وابستگی بین متغیرهای دبی اوج و حجم سیل دارد.

محاسبه دوره بازگشت دومتغیره بر اساس تابع مفصل نرمال نشان داد که دوره بازگشت دومتغیره در حالت {یا} نسبت به دوره بازگشت تک‌متغیره و دوره بازگشت دومتغیره در حالت {و} مقدار کمتری دارد. بنابراین، استفاده از دوره بازگشت دومتغیره در حالت {یا} برای طراحی سازه‌های هیدرولیکی مناسب است که سیل طراحی دارای احتمال بیشتر و در نتیجه دبی جریان کمتر برخوردارند؛ ولی هرگاه کنترل سیل از اهمیت بیشتری برخوردار باشد استفاده از دوره بازگشت دومتغیره در حالت {و} ارجح است.

در نهایت با مقایسه نتایج به دست آمده از دوره بازگشت در حالت تک و دومتغیره می‌توان دریافت که تحلیل تک‌متغیره سیلاب تحلیل دقیق و جامعی نیست و برای تحلیل دقیق‌تر بهتر است از دو متغیر و بیشتر استفاده شود. بنابراین، پیشنهاد می‌شود در پژوهش‌های آینده از تعداد متغیرهای بیشتری برای تحلیل سیلاب استفاده شود.

#### ۵- فهرست علائم

$V_i^{Base}$	جریان پایه ( $m^3$ )
$Q_{ij}$	جریان مشاهده‌شده روز زام سال نام ( $m^3 s^{-1}$ )
$Q_{is}$	جریان روزانه مشاهده‌ای در تاریخ شروع رواناب سال نام ( $m^3 s^{-1}$ )
$Q_{ie}$	جریان روزانه مشاهده‌ای در تاریخ انتهای رواناب سال نام ( $m^3 s^{-1}$ )
$Q_{ij}^b$	مقدار جریان پایه روز زام سال نام ( $m^3 s^{-1}$ )
$\tau_n$	ضریب همبستگی تاوکنندال
$\tau_X(x)$	توزیع حاشیه‌ای متغیر $X$
$\tau_Y(y)$	توزیع حاشیه‌ای متغیر $Y$
$F_{X,Y}$	تابع توزیع توأم
$(u, v)$	تابع چگالی مفصل
$r(X, Y)$	تابع چگالی احتمال توأم
$f_X(x)$	تابع چگالی حاشیه‌ای متغیر تصادفی $X$
$f_Y(y)$	تابع چگالی حاشیه‌ای متغیر تصادفی $Y$
$(u, v, \rho)$	مفصل گوسی (نرمال)
$\phi_\rho$	تابع توزیع نرمال استاندارد دومتغیره با ضریب همبستگی $\rho$
$\phi^{-1}$	معکوس تابع توزیع نرمال استاندارد دومتغیره
$t_{\rho, v}$	مفصل تی (تی-استودنت) تابع توزیع تی استاندارد دومتغیره با پارامتر همبستگی $\rho$ و $v$ درجه آزادی
$t_v^{-1}$	معکوس تابع توزیع تی استاندارد با درجه آزادی $v$
$S_n$	آزمون کرامر-فون مایزس
$C_n$	مفصل تجربی
$AIC$	معیار اطلاعات آکائیکه
$BIC$	معیار اطلاعات بیزی
$N$	تعداد مشاهدات
$MSE$	میانگین مربعات خطا
$\hat{MSE}$	ریشه میانگین مربعات خطا
$K$	تعداد پارامترهای استفاده‌شده در برآورد مقادیر محاسباتی
$x_c(i)$	مقدار محاسبه‌شده نام
$x_0(i)$	مقدار مشاهده‌شده نام

$P_i$	دبی اوج ( $m^3 s^{-1}$ )
$V_i$	حجم سیلاب ( $m^3$ )
$V_i^{Total}$	کل جریان موجود در حوضه ( $m^3$ )

Chen, Y., and P. Lin (2016). "Bivariate Discontinuous Flood Frequency Analysis Based on Archimedean CopulaFunctions".  
<https://hdl.handle.net/20.500.11970/108600>.

Chen, L. and S. Guo (2019). Copulas and its application in hydrology and water resources, Springer. <https://doi.org/10.1007/978-981-13-0574-0>.

Chebana, F., & Ouarda, T. B. (2011). Multivariate quantiles in hydrological frequency analysis. *Environmetrics*, 22(1), 63-78.  
<https://doi.org/10.1002/env.1027>.

Chowdhary, H., et al. (2011). "Identification of suitable copulas for bivariate frequency analysis of flood peak and flood volume data". *Hydrology Research* 42(2-3): 193-216.  
<https://doi.org/10.2166/nh.2011.065>.

da Rocha Júnior, R. L., et al. (2020). "Bivariate assessment of drought return periods and frequency in Brazilian northeast using joint distribution by copula method." *Geosciences* 10(4): 135.

Favre, A. C., El Adlouni, S., Perreault, L., Thiémondge, N., & Bobée, B. (2004). Multivariate hydrological frequency analysis using copulas. *Water resources research*, 40(1).  
<https://doi.org/10.1029/2003WR002456>.

Ganguli, P. and M. J. Reddy (2013). "Probabilistic assessment of flood risks using trivariate copulas." *Theoretical and applied Climatology* 111(1): 341-360. <https://doi.org/10.1007/s00704-012-0664-4>

Joe, H. (2014). *Dependence modeling with copulas*, CRC press. <https://doi.org/10.1201/b17116>.

Karmakar, S. and S. Simonovic (2008). "Bivariate flood frequency analysis: Part 1. Determination of marginals by parametric and nonparametric techniques." *Journal of Flood Risk Management* 1(4): 190-200. <https://doi.org/10.1111/j.1753-318X.2008.00022.x>.

Karmakar, S. and S. Simonovic (2009). "Bivariate flood frequency analysis. Part 2: A copula-based approach with mixed marginal distributions." *Journal of Flood Risk Management* 2(1): 32-44.  
<https://doi.org/10.1111/j.1753-318X.2009.01020.x>.

Khosravi Fard, A., et al. (2017). "The Study and Classification of Water Quality of Ghorbaghestan and Doab Merk Stations in Gharasoo River Basin." *Journal of Research in Environmental Health* 2(4):

$L(\theta)$	حداکثر لگاریتم تابع درست‌نمایی
$x(x_i)$	تابع توزیع تجمعی حاشیه‌ای برای متغیر X
$y(y_i)$	تابع توزیع تجمعی حاشیه‌ای برای متغیر Y
$c_\theta$	چگالی تابع مفصل
$T_P$	دوره بازگشت تک‌متغیره دبی اوج سیل
$T_V$	دوره بازگشت تک‌متغیره حجم سیل
$F(p)$	تابع توزیع تجمعی حاشیه‌ای متغیر دبی اوج سیل
$G(v)$	تابع توزیع تجمعی حاشیه‌ای متغیر حجم سیل
$T_{P,V}^v$	دوره بازگشت دومت غیر دبی اوج و حجم سیل در حالت {یا}
$T_{P,V}^\wedge$	دوره بازگشت دومت غیر دبی اوج و حجم سیل در حالت {و}
$\mu$	میانگین فاصله زمانی بین دو رخداد متوالی است

## ۶- سپاس‌گزاری

لازم است در اینجا از همکاری سازمان آب و برق استان خوزستان جهت ارائه داده‌های موردنیاز و به‌کاربرده شده در این پژوهش، کمال تشکر و قدردانی را داشته باشیم.

## References

## منبع‌ها

Afsharypour, z., et al. (2018). "Evaluation of hydrological design of dam spillway using copula-based bivariate return periods (Case study: Golestan 2 dam, Golestan Province)." *Irrigation and Water Engineering* 8(3): 78-93.  
<https://civilica.com/doc/888549/>. (In Persian)

Afsharypour, z., et al. (2019). "Bivariate frequency analysis of rainfall intensity and depth using copula functions (Case study: Chehelchai Watershed, GorganRoad, Golestan)." *Irrigation and Water Engineering* 9(2): 121-134.  
<https://civilica.com/doc/888506/>. (In Persian)

Akaike, H. (1974). "A new look at the statistical model identification." *IEEE Transactions on automatic control* 19(6): 716-723. DOI: 10.1109/TAC.1974.1100705.

- generalized pareto intensity duration model of storm rainfall exploiting 2-copulas." *J Geophys Res* **108**(2): 4067.  
<https://doi.org/10.1029/2002JD002534>
- Salvadori, G., et al. (2007). Extremes in nature: an approach using copulas, *Springer Science & Business Media*.[https://www.researchgate.net/publication/253737456\\_Extremes\\_in\\_Nature\\_An\\_Approach\\_Using\\_Copulas](https://www.researchgate.net/publication/253737456_Extremes_in_Nature_An_Approach_Using_Copulas).
- Shiau, J. (2006). "Fitting drought duration and severity with two-dimensional copulas." *Water resources management* 20(5): 795-815.
- Sklar, M. (1959). "*Fonctions de repartition an dimensions et leurs marges*." *Publ. inst. statist. univ. Paris* **8**: 229-231.
- Sraj, M., et al. (2015). "Bivariate flood frequency analysis using the copula function: a case study of the Litija station on the Sava River." *Hydrological Processes* 29(2): 225-238. DOI:10.1002/hyp.10145.
- Stedinger, J. R. (1993). "Frequency analysis of extreme events." in *Handbook of Hydrology*.  
[https://www.researchgate.net/publication/24564184\\_Frequency\\_Analysis\\_of\\_Extreme\\_Events](https://www.researchgate.net/publication/24564184_Frequency_Analysis_of_Extreme_Events).
- Xu, K., et al. (2014). "Joint probability analysis of extreme precipitation and storm tide in a coastal city under changing environment." *PLoS One* **9**(10): e109341.  
<https://doi.org/10.1371/journal.pone.0109341>
- Yue, S., et al. (1999). "The Gumbel mixed model for flood frequency analysis." *Journal of hydrology* 226(1-2):88-100. [https://doi.org/10.1016/S0022-1694\(99\)00168-7](https://doi.org/10.1016/S0022-1694(99)00168-7).
- Zeraati, S. and M. Zounemat-Kermani (2018). "Performance of Archimedean copula functions in annual flood estimation, Case study: Qarah-Soo Watershed." *Journal of Natural Environmental Hazards* **6**(14): 87-102.  
<https://civilica.com/doc/1019544/>. (In Persian)
- Zhang, L. and V. P. Singh (2012). "Bivariate rainfall and runoff analysis using entropy and copula theories." *Entropy* 14(9):1784-1812.  
<https://doi.org/10.3390/e14091784>
- 299-310. DOI: 10.22038/JREH.2017.21111.1118. (In Persian)
- Li, T., et al. (2013). "Bivariate flood frequency analysis with historical information based on copula." *Journal of Hydrologic Engineering* **18**(8): 1018-1030. DOI:10.1061/(ASCE)HE.1943-5584.0000684.
- Omidi, M., et al. (2010). "The Probabilistic Analysis of Drought Severity–Duration in Tehran Province using Copula Functions." *Iranian Journal of Soil and Water Research* 41(1): -. (In Persian).
- Papaioannou, G., Kohnová, S., Bacigál, T., Szolgay, J., Hlavèová, K., & Loukas, A. (2016). Joint modelling of flood peaks and volumes: A copula application for the Danube River. *Journal of Hydrology and Hydromechanics*, **64**(4), 382.  
<https://doi.org/10.1515/johh-2016-0049>.
- Poonia, V., et al. (2021). "Copula based analysis of meteorological, hydrological and agricultural drought characteristics across Indian river basins." *International Journal of Climatology* 41(9): 4637-4652.
- Rahimi, L., et al. (2014). "Flood Frequency Analysis Using Archimedean Copula Functions Based on Annual Maximum Series (Case Study: Arazkuseh Hydrometric Station in Golestan Province)." *Iranian Journal of Irrigation & Drainage* 8(2): 353-365. [http://idj.iaid.ir/article\\_54737.html?lang=en](http://idj.iaid.ir/article_54737.html?lang=en). (In Persian)
- Reddy, M. J. and P. Ganguli (2012). "Bivariate flood frequency analysis of upper Godavari River flows using Archimedean copulas." *Water resources management* **26**(14): 3995-4018. DOI:10.1007/s11269-012-0124-z
- Requena, A., et al. (2013). "A bivariate return period based on copulas for hydrologic dam design: accounting for reservoir routing in risk estimation." *Hydrology and Earth System Sciences* 17(8): 3023-3038. DOI:10.5194/hess-17-3023-2013.
- Salari, m., et al. (2015). "Bivariate Flood Frequency Analysis Using the Copula Functions." *Irrigation Sciences and Engineering* 37(4): 29-38. <https://civilica.com/doc/1189133/>. (In Persian)
- Salvadori, G. and C. De Michele (2003). "A